METODOS NUMERICOS 3006907
Interpolación segmentaria

Enero 31, 2019

Interpolación segmentaria

Interpolar una tabla de $n+1$ parejas (x_j, y_j) , $j = 0, ..., n$, donde $x_0 < x_1 < ... < x_n$, por medio de una curva definida a trozos, consiste en encontrar una función S definida en $[x_0, x_n]$ que en cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ tiene una forma particular.

Lineal a trozos

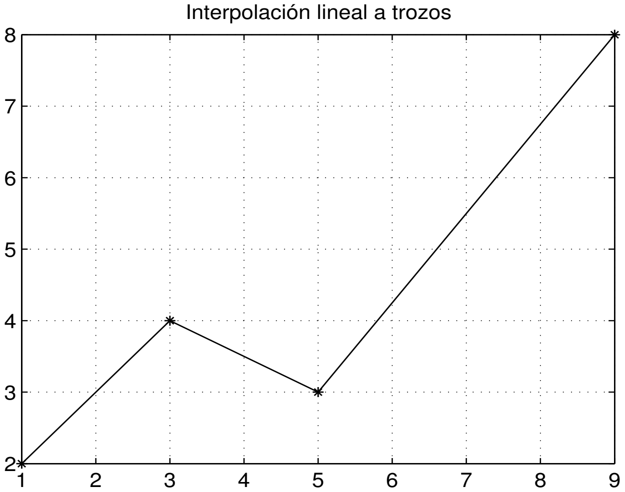
La más importante de las interpolaciones segmentarias es también la más común, se trata de la interpolación lineal a trozos. Consiste en definir al interpolante S por medio de las rectas $S_j(x)$ que pasan por los puntos (x_j, y_j) y (x_{j+1}, y_{j+1}) .

Ejemplo: El interpolante lineal a trozos de la tabla

x_j	1	3	5	9
y_j	2	4	3	8

es $$S(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [1,3] \\ \dfrac{11-x}{2}, & x \in (3,5] \\ \dfrac{5x-13}{4}, & x \in (5,9] \end{cases}$$

La interpolación lineal a trozos es la que utilizan por defecto la mayoría de las herramientas graficadoras, incluido `plot` de MATLAB. En general un interpolante lineal a trozos es una curva continua no diferenciable. En lo que sigue buscamos una función interpolante polinómica segmentaria que en el interior del intervalo es continua y tiene primera y segunda derivadas continuas.


Interpolación lineal a trozos
8
7
6
5
4
3
2
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Interpolación cúbica segmentaria (Cerchas Cúbicas)

Dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ con $x_0 < x_1 < ... < x_n$ consideramos la función S definida en $[x_0, x_n]$ por

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x), & x \in (x_1, x_2] \\ & \vdots \\ S_{n-1}(x) & x \in (x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

tal que cada S_k es un polinomio cúbico y buscamos que $S \in C^2[x_0, x_k]$.

La expresión en inglés para referirse a esta interpolación es **cubic splines.**

Definición

Supongamos que tenemos $n+1$ puntos $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{n}$ cuyas abscisas están ordenadas de manera creciente $x_0 < x_1 < ... < x_n$. Se dice que una función $S(x)$ es una **cercha cúbica interpoladora** o un **interpolante cúbico segmentario** para dichos datos si existen n polinomios cúbicos $S_k(x)$ que podemos escribir en términos de unos coeficientes a_k, b_k, c_k y d_k como

I. $S(x) = S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$ para $x \in [x_k, x_{k+1}]$ y $k = 0, 1, ..., n-1$, que verifican las siguientes propiedades:

II. $S(x_k) = y_k$, para $k = 0, 1, ..., n$.

III. $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1})$, para $k = 0, 1, ..., n-2$.

IV. $S_k^{'}(x_{k+1}) = S_{k+1}^{'}(x_{k+1})$, para $k = 0, 1, ..., n-2$.

V. $S_k^{''}(x_{k+1}) = S_{k+1}^{''}(x_{k+1})$, para $k = 0, 1, ..., n-2$.

Ecuaciones e incógnitas

- La propiedad I. indica que los polinomios de los subintervalos son todos de grado ≤ 3, cada uno tiene 4 (incógnitas) coeficientes y generan un conjunto de $4n$ coeficientes.
- La propiedad II. dice que $S(x)$ es una función interpolante de la tabla, lo cual proporciona $n+1$ ecuaciones.
- Con la propiedad III. se impone la continuidad de $S(x)$. Esta propiedad aporta $n-1$ ecuaciones al sistema de ecuaciones.
- La continuidad de $S'(x)$ y $S''(x)$ se imponen a través de las propiedades IV. y V. Cada una de estas propiedades aporta $n-1$ ecuaciones al sistema de ecuaciones.
- En total hay $4n-2$ ecuaciones y $4n$ incógnitas, lo que deja dos grados de libertad. Se acostumbra establecer las dos ecuaciones faltantes a partir de *restricciones en los extremos del intervalo.*

Cálculo de derivadas

$$S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$$

para $x \in [x_k, x_{k+1}]$ y $k = 0, 1, ..., n-1$. Entonces

$$\begin{aligned} S_k(x_k) &= a_k = y_k \\ S_k'(x) &= b_k + 2c_k(x - x_k) + 3d_k(x - x_k)^2 \\ S_k''(x) &= 2c_k + 6d_k(x - x_k) \\ S_k'''(x) &= 6d_k. \end{aligned}$$

Hacemos $h_k = x_{k+1} - x_k$ para $k = 0, 1, ..., n-1$ y se pueden deducir las siguientes igualdades:

$$S_k''(x_k) = 2c_k \text{ para } k = 0 : n-1$$

y se acostumbra pedir $a_n = y_n$ y $S_{n-1}''(x_n) = 2c_n$.

Por condición V,

$$c_{k+1} = c_k + 3d_k h_k \tag{1}$$

Por condición IV

$$b_{k+1} = b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2 \tag{2}$$

Por condición III,

$$a_{k+1} = a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 \tag{3}$$

Se despeja d_k de (1) y se reemplaza en (3) y (2). Resultan

$$b_{k+1} = b_k + h_k \left(c_k + c_{k+1}\right) \tag{4}$$

$$a_{k+1} = a_k + b_k h_k + \frac{h_k^2}{3} \left(2c_k + c_{k+1}\right) \tag{5}$$

Despejando b_k de (5) se llega a

$$b_k = \frac{1}{h_k}\left(a_{k+1} - a_k\right) - \frac{h_k}{3}\left(2c_{k1} + c_{k+1}\right) \tag{6}$$

que evaluada en $k-1$ es

$$b_{k-1} = \frac{1}{h_{k-1}}\left(a_k - a_{k-1}\right) - \frac{h_k}{3}\left(2c_{k-1} + c_k\right) \tag{7}$$

Se reemplaza en (4) y se llega a

$$\begin{multline} h_{k-1}c_{k-1} + 2\left(h_{k-1} + h_k\right)c_k + h_k c_{k+1} = \\ \frac{3}{h_k}\left(a_{k+1} - a_k\right) - \frac{3}{h_{k-1}}\left(a_k - a_{k-1}\right) \end{multline} \tag{8}$$

Hay ecuaciones para $k = 1 : n - 1$ con vector incógnito $c = [c_0, c_1, ...c_n]^T$.
La más común de las dos condiciones adicionales es la llamada NATURAL. Consiste en pedir

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0,$$

esto es, $c_0 = c_n = 0$.

Ejemplo

Encuentre la cercha cúbica **natural** interpolatoria de la tabla

x	-2	0	1	3	6
y	7	-5	3	1	-11

La cercha buscada tiene la forma

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x), & x \in (x_1, x_2] \\ S_2(x), & x \in (x_2, x_3] \\ S_3(x) & x \in (x_3, x_4] \end{cases}$$

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [-2, 0] \\ S_1(x), & x \in (0, 1] \\ S_2(x), & x \in (1, 3] \\ S_3(x) & x \in (3, 6] \end{cases},$$

se tiene que

$$h_0 = 2,\ h_1 = 1,\ h_2 = 2,\ h_3 = 3$$

y el sistema generado es

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 2 & 6 & 1 & & \\ & 1 & 6 & 2 & \\ & & 2 & 10 & 3 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 42 \\ -27 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuya solución para las componentes centrales es

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.9877 \\ -5.9264 \\ 0.2853 \end{bmatrix}.$$

Cercha cúbica sujeta (clamped spline)

Del cuadro presentado adelante para cálculo de derivadas obtenemos

$$f'(x_0) = S'(x_0) = b_0 = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1) \qquad (9)$$

es decir,

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(x_0) \qquad (10)$$

Análogamente, en el otro extremo, obtenemos la ecuación

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = -\frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) + 3f'(x_n) \qquad (11)$$

y el sistema generado es

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & & & \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix}$$