



**MATEMATICAS DISCRETAS 3006906**  
**TALLER 1, SEMESTRE 02-2019**

El libro de texto es: R. Johnsonbaugh, Matemáticas discretas, 6a. ed. Pearson, 2005. De este libro se recomienda realizar los siguientes ejercicios:

Sección 1.2: 3, 7.

Sección 1.3: 8, 9, 11, 12, 17, 28, 30.

Sección 1.4: 2, 16, 23, 28, 31.

Sección 1.5: 12, 14, 20, 22.

Sección 1.7: 1-8, 17, 21, 22.

Sección 2.1: 1-30, 32, 33, 44-47, 53, 75, 76, 82.

**Dos funciones definidas en los números reales**

**Función piso o función parte entera  $\lfloor \cdot \rfloor$**

El piso de  $x$ , denotado  $\lfloor x \rfloor$ , es el mayor entero menor o igual a  $x$ .

**Función techo  $\lceil \cdot \rceil$**

El techo de  $x$ , denotado  $\lceil x \rceil$ , es el menor entero mayor o igual a  $x$ .

1. Demuestre que si  $x \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\lfloor x \rfloor - \lceil x \rceil = \begin{cases} -1, & \text{si } x \notin \mathbb{Z}. \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

2. Pruebe que si  $n$  es un entero, entonces

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par.} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

3. Sea  $x \in \mathbb{R}$ . Demuestre que

(a)  $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

(b)  $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

(c)  $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$

4. Liste los elementos de estos conjuntos.

(a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$

(b)  $\{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x < 15\}$

(c)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 3\}$

5. Para cada uno de los siguientes conjuntos, determine si 1 es un elemento de dicho conjunto.

(a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ es un entero mayor que } 5\}$

(b)  $\{1, \{1\}\}$

(c)  $\{\{1\}, \{\{1\}\}\}$

(d)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ es el cuadrado de un entero}\}$

(e)  $\{\{\{1\}\}\}$

(f)  $\{\{1\}, \{1, \{1\}\}\}$

6. Para cada uno de los conjuntos del ejercicio anterior, determine si  $\{1\}$  es un elemento de dicho conjunto.

7. Determine si cada uno de estos enunciados es verdadero o falso.

(a)  $\emptyset \in \emptyset$

(b)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(c)  $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$

(d)  $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(e)  $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(f)  $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$

(g)  $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$

(h)  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

(i)  $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(j)  $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset, \emptyset\}$

8. Determine si cada uno de estos enunciados es verdadero o falso.

(a)  $x \in \{x\}$

(b)  $\emptyset \in \{x\}$

(c)  $\{x\} \subseteq \{x\}$

(d)  $\{x\} \in \{x\}$

(e)  $\{x\} \in \{\{x\}\}$

9. Calcule  $|A|$ , donde  $|A|$  denota el número de elementos en el conjunto  $A$ , para cada uno de los siguientes conjuntos.
- (a)  $A = \{a\}$       (b)  $A = \{\{a\}\}$       (c)  $A = \{a, \{a\}\}$       (d)  $A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$       (e)  $A = \emptyset$
10. ¿Cuántos elementos tiene cada uno de estos conjuntos, donde  $a$  y  $b$  son elementos distintos?
- (a)  $\mathcal{P}(\{a, b, \{a, b\}\})$       (b)  $\mathcal{P}(\{\emptyset, a, b, \{a\}, \{\{a\}\}\})$       (c)  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$
11. Sean  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y  $B = \{0, 3, 6, 9\}$ . Halle
- (a)  $A \cup B$       (b)  $A \cap B$       (c)  $A - B$       (d)  $B - A$
12. Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Demuestre que
- (a)  $(A \cap B) \subseteq A$       (b)  $A \subseteq (A \cup B)$       (c)  $A - B \subseteq A$       (d)  $A \cap (B - A) = \emptyset$       (e)  $A \cup (B - A) = A \cup B$
13. Sean  $A, B, C$  conjuntos. Demuestre:
- (a)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$   
(b)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
14. Establezca como universo  $U = \mathbb{N}$ . Sean  $A = \{n \mid n \text{ es par}\}$ ,  $B = \{n \mid 3 \text{ divide a } n\}$  y  $C = \{n \mid 5 \text{ divide a } n\}$ . Describa cada uno de los siguientes conjuntos.
- (a)  $A \cup B$       (b)  $B \cap C$       (c)  $\overline{A}$       (d)  $U - C$       (e)  $(A \cap B) - C$   
(f)  $A - B$       (g)  $B \cap U$       (h)  $A \cup \emptyset$       (i)  $A \cap (B \cup C)$       (j)  $\overline{A \cap B} \cup C$   
(k)  $B - A$       (l)  $B \cap \emptyset$       (m)  $A \cup U$       (n)  $A \cup (B \cap C)$       (o)  $\overline{B} \cap (C - A)$
15. La **diferencia simétrica** de dos conjuntos  $A$  y  $B$  es el conjunto

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

¿Qué se puede concluir acerca de los conjuntos  $A$  y  $B$  si se sabe que

- (a)  $A \cup B = A?$       (b)  $A \cap B = A?$       (c)  $A - B = A?$       (d)  $A \cap B = B \cap A?$       (e)  $A \Delta B = B - A?$
16. Encuentre el producto cartesiano  $A \times B$  y el producto  $B \times A$  para los siguientes casos.
- (a)  $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}$       (b)  $A = \{a, b\}, B = \{1\}$       (c)  $A = \{a\}, B = \{1\}$
17. Tome el conjunto universo como  $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  y considere los conjuntos  $A = \{1, 4, 7, 8\}$ ,  $B = \{1, 2, 4\}$  y  $C = \{2, 4\}$ . Sea  $\mathcal{P}(X)$  el conjunto partes de  $X$  y  $\overline{D} = U - D$ .

Liste los elementos de los siguientes conjuntos:

- (a)  $\overline{A \cup (B - C)}$       (b)  $\overline{(A \cap B)} \cup (A \cap C)$   
(c)  $B - (A \cup C)$       (d)  $\mathcal{P}(A \cap B)$   
(e)  $(A - B) \times (C - A)$       (f)  $\mathcal{P}(A - B)$
18. Un monitor de la Escuela de Matemáticas hizo una encuesta a 50 estudiantes del primer semestre, y encontró que: 27 están tomando el curso de Geometría (G), 28 están matriculados en el de Algebra (A) y en el de Física (F) hay 31 estudiantes. También se supo que Geometría y Algebra la estudian 19 estudiantes, Algebra y Física la estudian 16 estudiantes y 9 estudiantes estudian las tres materias. Finalmente también se encontró que 5 de los estudiantes no toman ninguno de los tres cursos.
- a. Cuántos de los estudiantes están matriculados en Física y Geometría?  
b. Cuántos de los estudiantes encuestados toman solamente una de las materias?  
c. Cuántos de los estudiantes toman exactamente 2 de las materias?

Nota: Principio de inclusión-exclusión. Si  $A, B$  y  $C$  son conjuntos finitos, el número de elementos de  $A \cup B \cup C$ , denotado  $|A \cup B \cup C|$ , es:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Para dos conjuntos es:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$