



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

MATEMATICAS DISCRETAS 3006906
TALLER 2, SEMESTRE 02-2019

El libro de texto es: R. Johnsonbaugh, Matemáticas discretas, 6a. ed. Pearson, 2005. De este libro se recomienda realizar los siguientes ejercicios:

Sección 2.2: 4, 7, 8, 10, 12, 15, 30, 37, 38, 49, 52, 53, 83

Principio de inducción matemática

1. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, para todo $n \geq 1$;

2. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$, para todo $n \geq 1$;

3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$,

4. $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$, para toda $a > 0$, $n \geq 1$;

5. Para todo entero positivo n , el número $n^4 - 4n^2$ es divisible por 3.

6. Para todo entero $n \geq 2$,

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n}$$

7. Pruebe que el cubo de cualquier entero positivo puede ser escrito como la diferencia de dos cuadrados.

(Ayuda: Note que $n^3 = (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) - (1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3)$.)

8. Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $8^n - 3^n$ es divisible por 5.

9. Si $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 5$, entonces $4^n > n^4$.

10. Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $1 + 2n \leq 3^n$.

11. Si $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 4$, entonces $3^n > n^3$.

12. Si $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 6$, entonces $7n < 2^n$.

13. Observe que

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ 1 - 4 &= -(1 + 2), \\ 1 - 4 + 9 &= 1 + 2 + 3, \\ 1 - 4 + 9 - 16 &= -(1 + 2 + 3 + 4). \end{aligned}$$

Induzca una ley general y demuéstrela por inducción.

14. Demuestre las siguientes afirmaciones sobre números enteros.

(a) Si n es un entero, entonces $2n + 5$ es un entero impar.

(b) Si k es impar y m es par, entonces $k^2 + m^2$ es impar.

(c) Si n es impar, entonces $(-1)^n = -1$.

15. Determine la verdad o falsedad de cada enunciado sobre números enteros. En el primer caso debe proporcionar una demostración y en el segundo caso, encontrar un contraejemplo.
- (a) El producto de dos enteros impares es impar.
 - (b) La diferencia entre cualquier par de números enteros impares es par.
 - (c) Si la suma de dos números enteros es un número par, entonces al menos uno de los enteros de la suma es par.
 - (d) Si $n - m$ es par, entonces $n^3 - m^3$ es par.
 - (e) Para todo entero n , si n es primo entonces $(-1)^n = -1$.
 - (f) Para todo entero m , si $m > 2$ entonces $m^2 - 4$ es un número compuesto.
 - (g) Si m y n son positivos y mn es un cuadrado perfecto, entonces tanto m como n son cuadrados perfectos.
 - (h) La diferencia de los cuadrados de cualquier par de números enteros consecutivos es impar.
16. Responda las siguientes preguntas sobre números enteros. Explique cada respuesta.
- (a) ¿Es verdad que $17|68$?
 - (b) ¿Es verdad que $6m(2m + 34)$ es divisible por 4?
 - (c) Si $n = 4k + 3$, ¿será cierto que $8|(n^2 - 1)$?