



MATEMATICAS DISCRETAS 3006906
TALLER 3, SEMESTRE 02–2019

El libro de texto es: R. Johnsonbaugh, Matemáticas discretas, 6a. ed. Pearson, 2005. De este libro se recomienda realizar los siguientes ejercicios:

Sección 2.3: 4, 7, 9, 18, 20, 40, 47, 51, 53, 54, 59, 67, 77, 91, 94, 102, 107, 108, 110, 116, 119, 121

Sección 3.1: 10, 12, 14, 19, 20, 22, 27, 30, 31, 34, 35, 36, 38, 39, 41, 44, 45, 47, 48, 51

Sucesiones, cadenas y relaciones

1. Sucesiones de punto fijo. Dada una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, generamos una sucesión de punto fijo de esta manera:

- p_0 primera aproximación
- $p_{n+1} = g(p_n)$ para $n = 0, 1, 2, \dots$

Calcule los primeros cinco términos de la sucesión de punto fijo correspondiente a las siguientes funciones y primeras aproximaciones:

(a) $g(x) = \frac{1}{4}x + 1$, $p_0 = 3$

(b) $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$, $p_0 = 3$. Esta es una iteración de Newton para aproximar $\sqrt{2}$.

(c) $g(x) = \frac{8}{x+2}$, $p_0 = 4$. En la página web de este curso en unvirtual, hay una animación para esta iteración.

2. Para la sucesión r definida por

$$r_n = 3 \cdot 2^n - 4 \cdot 5^n, \quad n \geq 0,$$

pruebe que $\{r_n\}$ satisface

$$r_n = 7 \cdot r_{n-1} - 10 \cdot r_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

3. Reescriba la sumatoria

$$\sum_{i=1}^n i^2 r^{n-i},$$

sustituyendo el índice i por k , donde $i = k + 1$.

4. Reescriba la sumatoria

$$\sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k},$$

sustituyendo el índice k por j , donde $k = j + 1$.

5. Proporcione ejemplos de relaciones en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ que satisfagan a la vez las siguientes propiedades:

- (a) No reflexiva, no antisimétrica y no transitiva
- (b) Reflexiva, antisimétrica y no transitiva
- (c) R y S sean antisimétricas pero $R \cup S$ no sea antisimétrica

6. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5\}$ y $C = \{2, 4\}$. Defina la relación R en el conjunto de partes de A , $\mathcal{P}(A)$, como

$$R := \{(X, Y) : X \cup B = Y \cup B\}$$

Demuestre que R es una relación: Reflexiva, simétrica y transitiva y liste los elementos del conjunto

$$[C] := \{X \in \mathcal{P}(A) : (X, C) \in R\}.$$

7. Sea $A = \{a, b, c, d\}$. Dibuje el digrafo correspondiente a cada una de las siguientes relaciones en A y diga si la relación es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.
- Calcule también las relaciones $R_i \circ R_j$ y sus correspondientes digrafos, para todo $i, j = 1, \dots, 6$.
- $R_1 = \{(b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d)\}$
 - $R_2 = \{(a, b), (b, a)\}$
 - $R_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$
 - $R_4 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a)\}$
 - $R_5 = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, a), (c, d)\}$
 - $R_6 = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$
8. Pruebe que si una relación R en un conjunto X es reflexiva, entonces R^n es reflexiva, para todo entero $n \geq 1$.
9. Pruebe que si una relación R en un conjunto X es reflexiva y transitiva, entonces $R^n = R$ para todo entero $n \geq 1$.
10. Pruebe que una relación R en un conjunto X es antisimétrica si y solo si $R \cap R^{-1} \subseteq \{(x, x) \mid x \in X\}$.
11. Sea R la relación en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ definida por $(a, b) \in R$ si y solo si 4 divide a $(a - b)$.
- Liste todos los elementos de $R, R^{-1}, R^2, R \cap R^{-1}$.
 - Para cada una de las relaciones de la parte a) haga un digrafo que lo represente.
 - Diga si R es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva. ¿Es R una relación de equivalencia?
12. Sea R una relación en un conjunto X . Sea S_R la relación en X definida por: $(x, y) \in S_R$ si y solo si $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$.
- Si $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 2), (1, 1), (2, 3)\}$. Encuentre S_R .
 - Si $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (5, 1)\}$. Encuentre S_R .
 - Pruebe que si R es una relación reflexiva y transitiva, entonces S_R es una relación de equivalencia.
13. a. Pruebe que sólo hay una relación de equivalencia en un conjunto de 1 elemento.
 b. Pruebe que hay exactamente dos relaciones de equivalencia en un conjunto de 2 elementos.
 c. ¿Cuántas relaciones de equivalencia hay en un conjunto con 3 elementos? Escríbalas explícitamente.