



**MATEMATICAS DISCRETAS 3006906**  
**TALLER 6, SEMESTRE 02-2019**

El libro de texto es: R. Johnsonbaugh, Matemáticas discretas, 6a. ed. Pearson, 2005. De este libro se recomienda realizar los siguientes ejercicios:

Este taller sirve para preparar el segundo examen parcial.

1. Demuestre por inducción que para cualquier número natural  $n$  y cualquier número real  $x \neq \pm 1$ ,

$$\prod_{r=1}^n (1 + x^{2^r}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x^2}.$$

2. Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de enteros dada por  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 3a_n$  para  $n \geq 1$ . Demuestre que  $a_n = 3^{n-1}$  para todo  $n \geq 1$ .
3. Una sucesión se define recursivamente así:  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 3$  y  $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$  para  $n \geq 2$ .
- (a) Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión.
  - (b) Encuentre una fórmula para  $a_n$ .
  - (c) Verifique la fórmula hallada.
  - (d) Encuentre una fórmula para  $a_n$  que utiliza solamente un término anterior.
4. Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de enteros dada por  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = n^2 a_n$  para  $n \geq 1$ . Encuentre los primeros seis términos de la sucesión. Conjeture una fórmula general para  $a_n$  y demuestre su conjetura por inducción.
5. Represente la sucesión de Fibonacci así:  $f_1 = f_2 = 1$ ,  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  para  $n > 2$ .
- (a) Verifique que  $\sum_{j=1}^n f_j = f_{n+2} - 1$  para  $n = 4, 5, 6$ .
  - (b) Demuestre que la fórmula del literal anterior es válida para  $n \geq 1$ .
  - (c) ¿Cuáles términos de la sucesión de Fibonacci son números pares?
6. Resuelva las siguientes relaciones de recurrencia:
- (a)  $a_n = 4a_{n-1}$  para  $n \geq 1$  con  $a_0 = 1$ .
  - (b)  $a_{n+1} = -8a_n - 16a_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ , dado que  $a_0 = 5$ ,  $a_1 = 17$ .
  - (c)  $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ , dado que  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 8$ .
  - (d)  $a_{n+1} = 7a_n - 10a_{n-1}$ ,  $n \geq 2$ , dado que  $a_1 = 10$ ,  $a_2 = 29$ .
7. En cada caso encuentre el máximo común divisor de  $a$  y  $b$  y encuentre enteros  $s$  y  $t$  tales que  $\text{mcd}(a, b) = sa + tb$ .
- (a)  $a = 93$ ,  $b = 119$ .
  - (b)  $a = 1575$ ,  $b = 231$ .
  - (c)  $a = 12345$ ,  $b = 54321$ .
  - (d)  $a = 630$ ,  $b = 196$ .
8. Sea  $p$  un número primo y sean  $a$  y  $b$  enteros tales que  $\text{mcd}(a, p^2) = p$  y  $\text{mcd}(b, p^3) = p^2$ . Encuentre
- (a)  $\text{mcd}(ab, p^4)$
  - (b)  $\text{mcd}(a + b, p^4)$
9. Sean  $p$  y  $q$  números primos distintos y  $n$  un número natural. Demuestre que si  $p|n$  y  $q|n$  entonces  $pq|n$ . Explique por qué la condición de ser primos distintos es indispensable.
10. Demuestre que la suma de dos primos consecutivos nunca es dos veces un número primo.
11. Suponga que  $a, b, c$  son enteros relativamente primos a otro número entero  $n$ . Demuestre que el producto  $abc$  es relativamente primo a  $n$ .
12. Demuestre que  $2^6 + 1$  no es un número primo.