Taller 8 — Matemáticas Discretas — Escuela de Matemáticas − Facultad de Ciencias

Sec. 8.1,8.2 — Código 3006906 — Universidad Nacional de Colombia

Este taller es complemento de los ejercicios de las secciones 8.1 y 8.2 del texto guía: Johnsonbaugh, R., Matemáticas Discretas, Sexta Edición, Pearson, México, 2005.

Primeras definiciones

Un grafo G está formado por un par de conjuntos V y E, donde $E \subset V \times V$. A los elementos del conjunto V se les llama *vértices* y a los del conjunto E se les llama *aristas*. El grafo se acostumbra a denotar por $G = (V, E)$. Si tanto V como E son conjuntos finitos, se dice que el grafo es *finito*. Se dice que dos grafos son iguales si tienen el mismo conjunto de vértices y de aristas. Cada arista e se puede representar como un par ordenado de vértices $\{u, v\} \in V \times V$; los vértices u y v se llaman los puntos finales de la arista e y se dice que la arista e es *incidente* a los vértices u y v. Dos vértices son *adyacentes* o vecinos, si entre ellos existe una arista. Por simplicidad usamos la notación uv en lugar de $\{u, v\}$.

Un grafo se dice *simple* si dados dos vértices adyacentes existe una única arista entre ellos, es decir, un *grafo simple* es aquella que no contiene bucles o lazos (aristas que van de un vértice en si mismo) ni aristas paralelas (dos aristas son paralelas si sus vértices de inicio y final son los mismos).

Un grafo se dice *orientado* si cada arista se dota de una orientación. En este curso estudiaremos únicamente grafos finitos, la mayoría de las veces simples. En general cuando queremos decir que el grafo es orientado diremos que es un *digrafo.* Y para enfatizar que tiene aristas múltiples se acostumbra usar el termino *multigrafo.*

Una forma típica de representar un grafo es mediante un dibujo en el plano, en el cual a cada vértice del grafo le asociamos un punto del plano y por cada arista del grafo trazamos una curva en el plano que une los puntos que representan los vértices; el dibujo resultante se llama una *representación gráfica de G en el plano.*

(a) (b)

Representaciones gráficas del grafo G

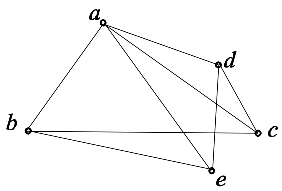
Aunque en la Figura 1 los dibujos (a) y (b) son representaciones del mismo grafo G, una diferencia esencial entre los dos dibujos es que en el (a) las aristas de G se cruzan, en tanto que en el (b) no hay un par de aristas que se crucen, por eso el grafo (b) lo definiremos como una *representación plana de G* o un *embebimiento de G en el plano.* Los grafos que se pueden representar en el plano se llaman *grafos planares* y fueron caracterizados inicialmente por el matemático ruso Kasimir Kuratowski en 1930. Sea $v \in V(G)$, el *grado* del vértice v en G es el número de aristas de G incidentes con v y se denota por $\deg_G v$ o simplemente por $\deg v$ o $\delta(v)$. Cuando los grados de los vértices de una gráfica G son d_1, d_2, ..., d_n y se presentan ordenados en orden no creciente, es decir, $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$, entonces a la sucesión de los d_i se le llama la sucesión de grados de G. Si $\deg v = 0$, v se llama vértice *aislado* y si $\deg v = 1$, entonces v se llama vértice *final.* En la Figura el vértice v_5 es un vértice final, los vértices v_1, v_8 y v_3 tienen grado 3 y los demás vértices tienen grado 2. Un grafo se llama *regular* si todos los vértices tienen el mismo grado.

Un grafo de n vértices se llama *completo* si es simple y cada pareja de vértices está conectada por una arista. Se denota K_n.

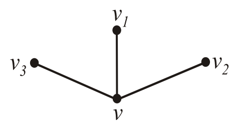
Un grafo se denomina bipartita si es simple y sus vértices están divididos en dos conjuntos no vacíos V_1 y V_2 de tamaños n y m respectivamente. La condición para las aristas es que todas ellas unen un vértice de V_1 con un vértice de V_2. Se denota $K_{n,m}$.

Primeros Ejercicios

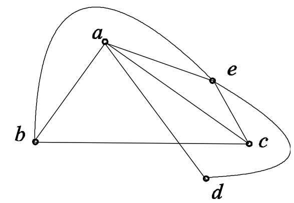
I a. Para los grafos de las siguientes figuras encuentre el conjunto de vértices, el conjunto de aristas y la sucesión de grados de los vértices. ¿Puede dibujar los grafos en forma planar?



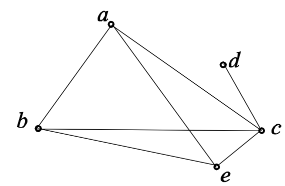
Grafo I



Grafo II



Grafo III



Grafo IV

b. Dibuje **todos** los grafos simples con vértices $V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Considere qué pasaría si se admiten grafos no simples: ¿se podría responder la pregunta?

c. Si un grafo G tiene sucesión de grados $5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 3$. ¿Cuántas aristas tiene?

II Para los numerales del i. al x. dibuje un grafo con las propiedades dadas o explique por qué no existe tal grafo.

i. Un grafo simple con 7 vértices, todos de grado 1.

ii. Un grafo con 6 aristas y 8 vértices.

iii. Un grafo simple con 6 vértices, cada uno de grado 3

iv. Un grafo con cuatro vértices, cada uno de grado 1.

v. Un grafo simple con cuatro aristas y cuatro vértices con grados 1,2,3,4.

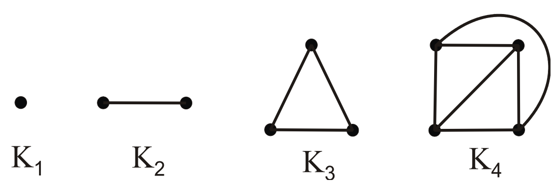
vi. Grafo simple con seis vértices de grado 1,2,3,4,5

vii. Grafo simple con cinco vértices de grado 2,2,4,4,4

viii. Un grafo simple bipartita con 5 vértices y 7 aristas.

ix. Un grafo simple completo con 10 aristas.

x. Un grafo simple bipartita con 6 vértices y 8 aristas.



Grafos completos

1. Haga otros dibujos de los grafos completos K_4, K_5, K_6. Encuentre el grado de los vértices y el número de aristas. Encuentre una fórmula para el número de aristas del grafo completo K_n. ¿Cuál es el grado de los vértices de K_n?

2. ¿Puede dibujar K_5 como un grafo plano?

3. Haga diagramas de los grafos bipartitos completos $K_{2,3}, K_{2,4}, K_{3,4}$. Encuentre el número de aristas en cada caso y los grados de los vértices. Encuentre una fórmula para el número de aristas del grafo bipartito completo $K_{n,m}$.