Nota: Cada vez que encuentre la frase "$\mathbb{F}$ **es un campo**" (o similar), la puede cambiar por "conjunto de los números reales $\mathbb{R}$".

RESUELVA ESTOS EJERCICIOS

1. Sea $f : S \to T$ una función. Pruebe que f es uno a uno si y sólo si para todos los subconjuntos A y B de S se cumple que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

2. Demuestre el siguiente teorema: Sean $\mathbb{F}$ un campo ordenado, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{F}$ acotado superiormente en $\mathbb{F}$ y $\emptyset \neq B \subset \mathbb{F}$ acotado inferiormente en $\mathbb{F}$. Entonces

$$s = \sup A \iff \begin{cases} (i) & s \in \mathbb{F} \quad \text{es cota superior de } A \\ (ii) & (\forall\ x < s)\ (\exists\ a \in A)\ (x < a) \end{cases}$$

$$y = \text{ínf}\, B \iff \begin{cases} (i) & y \in \mathbb{F} \quad \text{es cota inferior de } B \\ (ii) & (\forall\ x > y)\ (\exists\ b \in B)\ (x > b). \end{cases}$$

3. Sean A y B subconjuntos no vacíos de un campo ordenado $\mathbb{F}$. Suponga que $x \leq y$ para cada $x \in A$ y cada $y \in B$. Suponga que existen $\sup A$ e $\text{ínf}\, B$. Pruebe que $\sup A \leq \text{ínf}\, B$. Además, pruebe que $\sup A = \text{ínf}\, B$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, existen $x \in A$ e $y \in B$ tales que $y - x < \varepsilon$.

4. Sean $\mathbb{F}$ un campo completo, $a, b \in \mathbb{F}$ fijos y $A := \{x \in \mathbb{F} : a < x < b\}$. Pruebe que $\text{ínf}\, A = a$ y $\sup A = b$.

5. Sean $\mathbb{F}$ un campo ordenado, A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{F}$ y $c \in \mathbb{F}$ fijo. Se definen los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A + B &:= \{a + b : a \in A \ \wedge \ b \in B\}; \\ AB &:= \{ab : a \in A \ \wedge \ b \in B\}; \\ cA &:= \{ca : a \in A\}; \\ c + A &:= \{c + a : a \in A\}. \end{aligned}$$

Demuestre:

(a) Si A y B tienen extremo superior en $\mathbb{F}$, entonces $A + B$ tiene extremo superior en $\mathbb{F}$ y además $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

(b) Si $c > 0$ y A tiene extremo superior en $\mathbb{F}$, entonces cA tiene extremo superior en $\mathbb{F}$ y además $\sup(cA) = c \cdot \sup A$.

(c) Si A tiene extremo inferior en $\mathbb{F}$ y $c < 0$, entonces cA tiene extremo superior en $\mathbb{F}$ y además $\sup(cA) = c \cdot \text{ínf}\, A$.

(d) Si A y B contienen solamente elementos positivos y tienen extremo superior en $\mathbb{F}$, entonces AB tiene extremo superior en $\mathbb{F}$ y además $\sup(AB) = (\sup A)(\sup B)$.

(e) Si A y B tienen extremo superior en $\mathbb{F}$, entonces $A \cup B$ tiene extremo superior en $\mathbb{F}$ y además $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

(f) Si A tiene extremo superior en $\mathbb{F}$, entonces $c + A$ tiene extremo superior en $\mathbb{F}$ y además $\sup(c + A) = c + \sup A$.

(g) Si A tiene extremo inferior en $\mathbb{F}$, entonces $c + A$ tiene extremo inferior en $\mathbb{F}$ y además $\inf(c + A) = c + \inf A$.

6. Sea A un subconjunto no vacío de P con P el conjunto de elementos positivos de un campo completo, $\mathbb{F}$. Si A es acotado superiormente, pruebe que $\sup A > 0$. En caso de que A sea acotado inferiormente, demuestre que $\inf A \geq 0$.

7. Sean $\mathbb{F}$ un campo completo y $A \subset \mathbb{F}$ no vacío y acotado. Si $\inf A = \sup A$, demuestre que A es un conjunto singular, es decir unitario.

8. Se define la sucesión de reales por $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$. Pruebe que $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

9. Si $\{a_n\}$ es una sucesión de reales tal que $|a_n - a_{n+1}| < \frac{1}{n^2}$ pruebe que $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

10. Demuestre que la sucesión $\{a_n\}$ dada por $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + 2k}$ converge y halle su límite.

11. Sea $A \subset \mathbb{R}$ acotado y tal que $\inf A > 0$. Si definimos el conjunto de los recíprocos de A como $\frac{1}{A} := \{1/a : a \in A\}$, pruebe que este conjunto es acotado superiormente y además
$$\sup(\frac{1}{A}) = \frac{1}{\inf A}.$$

12. Sea $A \subset \mathbb{Q}$ acotado superiormente por $s \in \mathbb{Q}$ y acotado inferiormente por $y \in \mathbb{Q}$. Si tanto s como y pertenecen al conjunto A pruebe que $y = \inf A$ y que $s = \sup A$.

13. Sea $A = \{a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} : a, b, c \in \mathbb{Q}^*\}$. Pruebe que $\inf A = 6$.

14. Sean $x, y \in \mathbb{Q}$ dos racionales positivos fijos con $x < y$. Pruebe que para todo natural $n \geq 1$ se cumple que $n(x/y)^{n-1} < \frac{y}{y-x}$.

15. Sea $\{x_n\}$ la sucesión en $\mathbb{R}$ dada por $x_1 > 1$ y, para $n \geq 1$, $x_{n+1} = 2 - 1/x_n$. Pruebe que la sucesión es monótona y acotada. Encuentre su límite.

16. Pruebe que la sucesión definida por $q_n = \dfrac{n^2 - n}{4n^2 + 2}$ es acotada.

17. Sea $q_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + n^2}$. Demuestre que la sucesión $\{q_n\}$ converge. ¿Qué se puede afirmar de $\{nq_n\}$?

18. Determine si la sucesión $\{\frac{(-1)^n n}{2n+1}\}$ converge o no. Explique.

19. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de racionales no nulos tales que

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L < 1.$$

Pruebe que $a_n \to 0$. En el caso $L > 1$, pruebe que $1/a_n \to 0$.

20. Como aplicación de lo anterior, si $|r| < 1$ halle $\lim_{n\to\infty} nr^n$.

21. Sea $q_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Prueba que la sucesión $\{q_n\}$ es de Cauchy.

22. Pruebe que $\left\{\frac{n}{n^6 - 5n^3 - 2n - 1}\right\}$ converge.

23. Demuestre que la sucesión definida por $a_n = \dfrac{2n^7 + 5n}{3n^7 - 5n^2 + 12}$ converge.

24. Demuestre, usando la definición, que $\{\frac{5-2n-3n^2}{n^2-4n+8}\}$ converge.

25. Calcule $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}$.

26. Suponga que la sucesión $\{b_n\}$ dada por $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ converge a la constante $A \in \mathbb{R}$. Encuentre el límite (en términos de la constante A) de la sucesión $\{a_n\}$ dada por

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k^2 - 4k + 2}{k!}.$$

27. Demuestre que la sucesión definida por $x_1 = 3,\ x_{n+1} = \dfrac{4(1 + x_n)}{4 + x_n}$ converge y encuentre su límite.

28. Sea $\{b_n\}$ una sucesión de reales tal que $b_{n+1} - b_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Pruebe que $\frac{b_n}{n} \to x$ cuando $n \to \infty$.

29. Sean $\{r_n\}$ y $\{s_n\}$ sucesiones de números racionales que convergen a $r \in \mathbb{Q}$ y $s \in \mathbb{Q}$ respectivamente y tales que existe $N \in \mathbb{N}$ de manera que $r_n \leq s_n$ para todo $n \geq N$. Pruebe que $r \leq s$.

30. Demuestre, usando la definición, que la sucesión $\{\frac{n^2-n+1}{2n^3-n^2-1}\}$ converge a cero.

31. Se define la sucesión de reales de manera recursiva, así:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}) \ \text{ para } n \geq 3.$$

Pruebe que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Sugerencia: Halle una fórmula para $|x_n - x_{n+1}|$.

32. Sea $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$. Pruebe que $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

33. Suponga que la sucesión de reales definida por $t_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ es de Cauchy. Pruebe que $\{b_n\}$ dada por $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$ es una sucesión de Cauchy.

34. Sea $a_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y definamos $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Demuestre que si la sucesión $\{s_n\}$ converge entonces la sucesión $\{t_n\}$ dada por

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 + a_k}$$

converge.