MATEMÁTICAS ESPECIALES
Año 2017
Taller 11

1. Demuestre que las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares son
$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta, \quad v_r = -\frac{1}{r}u_\theta.$$
2. ¿Dónde es analítica la función $f(z) = z^2 - \bar{z}^2$?
3. Encontrar el valor de la derivada de $(2 + \mathrm{i}z)^6$ en 2i.
4. Encontrar todos los valores de k tales que $f(z) = e^x(\cos(ky) + \mathrm{i}\sin(ky))$ sea analítica.
5. Considere la función
$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$
definida en un dominio que no contiene a 0. Diga si es armónica y en caso afirmativo encuentre su armónica conjugada.
6. Demuestre que $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.
7. Demuestre que $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.
8. Halle $z \in \mathbb{C}$ tal que $\ln z = 4 - 3\mathrm{i}$.
9. Halle el valor principal de $(1 + \mathrm{i})^{1-\mathrm{i}}$.
10. Encuentre todas las soluciones de la ecuación $\sin z = \mathrm{i}\sinh(1)$.
11. Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Arg}(z)| \leq \pi/4\}$ y $w = f(z) = z^3$, encontrar $f(D)$.
12. Hallar la imagen de la región $R = \{z \in \mathbb{C} : \pi/6 \leq \mathrm{Re}(z) \leq \pi/3, -1 < \mathrm{Im}(z) < 0\}$ bajo el mapeo $f(z) = e^{\mathrm{i}z}$.
13. Hallar la imagen de la región $R = \{z \in \mathbb{C} : |Arg(z)| \leq \pi/4, 0 < |z| < 1\}$ bajo el mapeo $f(z) = \ln z$.