MATEMÁTICAS ESPECIALES
Año 2017
Taller 3

(Varios de estos ejercicios son tomados del texto guía)

1. Usando integrales de Fourier

   (a) Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\omega)}{\omega}\cos(\omega x)d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x \in [0,1) \\ \frac{\pi}{4}, & x = 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

   (b) Calcule el valor de

$$\int_0^\infty \frac{\sin(2\omega)}{\omega}d\omega.$$

2. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x \ge 1. \end{cases}$$

   (a) Escribir la expresión analítica que define la extensión par de f.

   (b) Utilizando lo anterior y la representación integral de Fourier de la función extendida, calcule:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}d\omega \quad y \quad \int_0^\infty \frac{\sin\omega\cos(2\omega)}{\omega}.$$

3. Demuestre que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin w\cos wx + (1-\cos w)\sin wx}{w}\,dw = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0 \\ 1, & \text{si} \quad x \in (0,1) \\ 0, & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

   Con base en lo anterior, calcule $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\,dw.$

4. Si sabemos que

$$\mathcal{F}\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

   (a) Evaluar

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty i\omega e^{-\frac{1}{4}\omega^2}e^{5i\omega}d\omega$$

   (b) Mostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty -\omega^2 e^{-\frac{1}{4}\omega^2}\cos(\omega x)d\omega = 4x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2}.$$