MATEMÁTICAS ESPECIALES
Año 2017
Taller 5 (Repaso para el primer parcial)

(Varios de estos ejercicios son tomados del texto guía)

1. Estas dos preguntas son de respuesta breve: ¿Cuál es la serie de Fourier de $f(x) = \sin x$? ¿Y de $f(x) = \sin^2 x$? Explique su respuesta.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0) \\ \cos(2x), & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

   (a) Hallar la serie de Fourier de f.

   (b) Demuestre que
$$\frac{1}{(-1)(3)} - \frac{3}{(1)(5)} + \frac{5}{(3)(7)} - \frac{7}{(5)(9)} + \cdots = -\frac{\pi}{4}.$$

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 2π periódica impar que en $[0, \pi)$ está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \pi/4) \\ x, & x \in [\pi/4, \pi/2) \\ 0, & x \in [\pi/2, \pi). \end{cases}$$

   Sin calcular explícitamente los coeficientes de Fourier, halle el valor numérico al cual converge la serie
$$\sum_{x=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_{2k-1}.$$

4. Encontrar la serie de Fourier compleja de la función 2π periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \pi - |x|$, para $-\pi \leq x \leq \pi$. Convierta dicha serie a la serie real.

5. Sea f la función definida por
$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

   (a) Escribir la expresión analítica que define la extensión par de f.

   (b) Utilizando lo anterior y la representación integral de Fourier de la función extendida, calcule:
$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega \quad y \quad \int_0^\infty \frac{\sin \omega \cos(2\omega)}{\omega}.$$

6. Resuelva, usando la transformada de Fourier, la ecuación diferencial $y' - 4y = f(x)$; donde $y = y(x)$ y
$$f(x) = \begin{cases} e^{-4x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$