Un conjunto de funciones reales $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), ...\}$ se dice ortogonal en un intervalo $a \leq x \leq b$ si

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0 \quad \text{para} \quad m \neq n$$

Ejemplo: El conjunto de funciones reales

$$\left\{1, \sin\frac{n\pi x}{L}, \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, ..\right\}$$

es un sistema ortogonal en $-L \leq x \leq L$

Sea $f(x)$ una función de periodo $2l$

$$\left.\begin{array}{c} a_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)dx \;, \qquad a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\tfrac{\pi}{l}x \; dx \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f\,(x)\,\mathrm{sen}\, n\tfrac{\pi}{l}x \; dx \end{array}\right\}$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \;\; \mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Esta última serie se llama *Serie de Fourier* generada por f y, a_0, a_n, b_n dados por las fórmulas de arriba se llaman *Coeficientes de Fourier.*

El siguiente teorema da condiciones suficientes para que una Serie de Fourier sea convergente. Se enuncia para funciones de periodo 2π pero también vale para funciones de periodo diferente.

TEOREMA 1. *Convergencia de las series de Fourier. Sea $f(x)$ una función periódica con periodo 2π y continua por partes en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Adicional, se asume que $f(x)$ tiene derivadas por la izquierda y la derecha en cada punto de ese intervalo. Entonces la serie de Fourier de $f(x)$ converge. Su suma es $f(x)$, excepto en los puntos x_0 donde $f(x)$ es discontinua. Allí la suma de la serie es el promedio de los límites izquierdo y derecho de $f(x)$ en x_0.*

Hallar la serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -2 < x < -1 \\ 1 & si \quad -1 \leq x < 1 \\ 0 & si \quad 1 \leq x < 2 \end{cases} \qquad f(x+4) = f(x)$$

En efecto: El período de la función es $T = 4 = 2L$ entonces

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} 0dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1dx + \frac{1}{2}\int_{1}^{2} 0dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_{0}^{1}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = 0$$

por lo tanto la serie de Fourier de la función está dada por

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} = \begin{cases} 0 & si & -2 < x < -1 \\ 1 & si & -1 < x < 1 \\ 0 & si & 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2} & si & x = \pm 1 \end{cases}$$

Ejercicio.

Mostrar que la serie de Fourier de $\sin^3\theta$ es $\frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$

Desarrollos de medio rango

En todos los ejemplos y exposiciones anteriores comenzamos con una función periódica y la serie de Fourier está determinada por las fórmulas de los coeficientes de Fourier. Sin embargo en algunas aplicaciones existe la necesidad de usar series de Fourier para una función definida en un intervalo de la forma $0 < x < L$ y queremos representar sus valores por una serie de Fourier en senos y cosenos o en solo cosenos o en solo senos y para ello definimos la extensión periódica

$$h(x) = f(x) \quad 0 < x < L \quad h(x+L) = h(x)$$

y suponiendo que f(x) satisface las condiciones de Dirichlet en $(0, L)$, la nueva función h(x) tendrá una expansión en serie de fourier y como h(x)=f(x) en $(0, L)$ se sigue que la expansión en serie de fourier de h(x) será representativa para f(x) en $(0, L)$. Si se quiere la serie de fourier en solo cosenos el primer paso es la extensión de f al intervalo $-L < x < 0$ y gracias a esto podemos extender f al eje real completo, mediante la condición de periodicidad $f(x+2L) = f(x)$.

Si f(x) está definida en $0 < x < L$, podemos hacer una extensión par de periódo $2L$ que está dada por

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad 0 < x < L \\ f(-x) & si \quad -L < x < 0 \end{cases} \qquad f(x+2L) = f(x)$$

y una extensión impar para solo senos dada por

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad 0 < x < L \\ -f(-x) & si \quad -L < x < 0 \end{cases} \qquad f(x+2L) = f(x)$$

y las series de Fourier vienen dadas por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} = f_p(x) = f(x) \quad 0 < x < L$$

con $$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_p(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx \quad \text{y} \quad b_n = 0$$

para la prolongación par y por

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} = f_i(x) = f(x) \qquad 0 < x < L$$

con $$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_i(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \quad \text{y} \quad a_n = 0$$

para la prolongación impar .

Ejemplo.

Desarrollar $f(x) = x \quad 0 < x < 2$ en serie de Fourier en solo cosenos.

Hacemos la
prolongación par de periódo 4, luego $2L = 4$, $L = 2$, así que $b_n = 0$ y

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx == \left[\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} - \left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) \quad \text{y} \quad a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx = \int_0^2 xdx = 2$$

luego la serie de Fourier viene dada por

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi x}{2} = x \quad 0 < x < 2$$

Serie de Fourier Compleja

la serie de Fourier compleja viene dada por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{n\pi x i}{L}} \quad \text{con} \quad C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{-n\pi x i}{L}}dx$$

O También, para $n \geq 1$, se tiene

$$C_n = \frac{(a_n - ib_n)}{2}$$

mientras que para $n \leq -1, C_n = (a_n + ib_n)/2$.

Ejemplo.

Hallar el desarrollo de Fourier complejo de la función

$$f(x) = x^2 \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

En efecto,

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{-n\pi xi}{L}}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-nxi}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2\cos nx - ix^2\sin nx)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx dx + 0 = \frac{1}{n^3\pi}\left[n^2x^2\sin nx - 2\sin nx + 2nx\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{2\cos n\pi}{n^2}$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

luego

$$x^2 = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2\cos n\pi}{n^2}e^{nix} + \frac{\pi^2}{3}$$

Si se quiere la serie real entonces

$$x^2 = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2\cos n\pi}{n^2}e^{nix} + \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2\cos n\pi}{n^2}\cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos n\pi}{n^2}\cos nx =$$

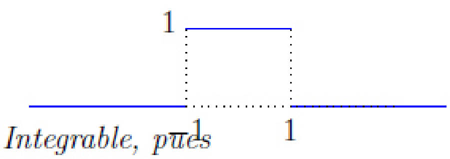
$$= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cos n\pi}{n^2}\cos nx$$

Integral de Fourier

Definición 1. *Una función $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ se llama Absolutamente Integrable si y sólo si, el valor principal de Cauchy de la integral impropia,*
$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi < \infty$ *(converge).*

Ejemplo 1. *Sea la función $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$, tal que:*

$$f(\xi) \; = \; \begin{cases} 1 & si \quad |\xi| \leq 1 \\ 0 & si \quad |\xi| > 1 \end{cases} \quad ,$$



Entonces, la función es Absolutamente Integrable, pues

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi = \int_{-1}^{1} d\xi = 2 < \infty$$

Nótese que una función periódica $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$, No es Absolutamente Integrable. En particular las funciones trigonométricas básicas, Seno y Coseno , no son Absolutamente Integrables.

Para una función $f: R \to R$ absolutamente integrable y que satisfaga las Condiciones de Dirichlet se tiene la representación en Integral de Fourier (si f es continua en x):

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \;\; = \;\; \int_0^{\infty} \left[a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \operatorname{sen} \lambda x\right] d\lambda \; , \quad x \in (-\infty, \infty) \\ \\ \qquad\qquad \text{REPRESENTACIÓN EN INTEGRAL DE FOURIER} \end{array}}$$

$$a_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \; , \quad b_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \operatorname{sen} \lambda \xi d\xi \quad , \quad \lambda > 0$$

Más precisamente,

Teorema 1. *Sea f una función, seccionalmente continua en todo intervalo finito, absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ y con derivadas laterales en cada punto. Entonces, la Representación Integral de Fourier converge puntualmente*

$$\int_0^{\infty} \left[a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \operatorname{sen} \lambda x\right] d\lambda = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \; , \; \forall x \in (-\infty, \infty).$$

Ejemplo.

Obtener la integral de Fourier de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1; |x| < 1 \\ 0; |x| > 1 \end{cases}$$

su integral de Fourier viene dada por

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)]\, d\omega$$

siendo $A(\omega)$ y $B(\omega)$ los coeficientes

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cos(\omega s)ds; \qquad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\sin(\omega s)ds$$

En el caso de la función $f(x) = \begin{cases} 1; |x| < 1 \\ 0; |x| > 1 \end{cases}$, los coeficientes $A(\omega)$ y $B(\omega)$ son

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \cos(\omega s)ds = \frac{2\sin(\omega)}{\pi\omega}; \qquad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \sin(\omega s)ds = 0$$

por lo que su integral de Fourier es

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\omega)}{\omega}\cos(\omega x)d\omega}$$

Notemos que f es continua en x=0 y así aplica el teorema de convergencia. Luego,

$1 = f(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{sen(w)dw}{w}$ y por tanto,

$$\int_0^{\infty} \frac{sen(w)dw}{w} = \pi/2.$$