Clase # 7, agosto 22/17 (Integral de Fourier Compleja)

Recordemos que para $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolutamente integrable y "Suave" a pedazos existe representación por una integral de Fourier:

(1) $$f(x) = \int_0^\infty (A_w \cos(wx) + B_w \operatorname{sen}(wx))\,dw,$$

donde $A_w = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(wx)\,dx$ y $B_w = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}(wx)\,dx$.

Notemos que $A_{-w} = A_w$ y $B_{-w} = -B_w$.

Transformemos (1):

$$\frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}$$

$$f(x) = \int_0^\infty [A_w \tfrac{1}{2}(e^{iwx} + e^{-iwx}) + B_w \cdot \tfrac{1}{2i}(e^{iwx} - e^{-iwx})]\,dw$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty [e^{iwx}(A_w - iB_w) + e^{-iwx}(A_w + iB_w)]\,dw.$$

Ahora bien, $\dfrac{A_{-w} + iB_{-w}}{2} = \dfrac{A_w - iB_w}{2} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos(wx) - i\operatorname{sen}(wx)]\,dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx = C_w, \quad C_{-w} = \frac{A_w - iB_{-w}}{2} = \frac{A_w + iB_w}{2}$$

Por tanto,

$$f(x) = \int_0^\infty C_w e^{+iwx}\,dw + \int_0^\infty C_{-w} e^{-iwx}\,dw$$

$$= \int_0^\infty C_w e^{iwx}\,dw + \int_{-\infty}^{0} C_w e^{iwx}\,dw \quad \left(\begin{matrix} -w = w' \ \text{y} \\ -dw = dw' \end{matrix}\right)$$

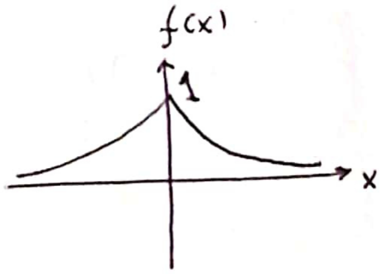
$$= \int_{-\infty}^{\infty} C_w e^{iwx}\,dw.$$

Def. La integral $\int_{-\infty}^{\infty} C_w e^{iwx}\,dw$ con $C_w = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx$ se llama integral compleja de Fourier.

Def. La expresión $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$ se llama Transformada de Fourier de f y se denota por $\hat{f}(\omega)$ o también por $\mathcal{F}(f)$.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx.$$

Notar que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$. (La llamamos transformada inversa de Fourier de f. La denotamos por $\mathcal{F}^{-1}$.



EJ. Sea $f(x) = e^{-|x|}$. Notemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ es par}}}{=} 2\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx$$

$$= \lim_{a\to+\infty} 2\int_{0}^{a} e^{-x}\, dx = -2\lim_{a\to+\infty}\left(e^{-a}-1\right) = 2 < \infty.$$

Por tanto, f es absolutamente integrable y así existe $\hat{f}$.

Hallemos su transformada de Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\, e^{-i\omega x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|-i\omega x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{x(1-i\omega)}\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{x(-1-i\omega)}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{a\to-\infty} \left.\frac{e^{x(1-i\omega)}}{1-i\omega}\right|_{a}^{0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{b\to+\infty} \left.\frac{e^{x(-1-i\omega)}}{-1-i\omega}\right|_{0}^{b}$$

(pág 11)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1-i\omega} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+i\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{1+\omega^2}$$

$\uparrow$ Hemos usado que $\lim_{a\to-\infty} e^{a}e^{-i\omega a} = 0$ pues $e^{a} \underset{a\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ y $|e^{-i\omega a}| = 1$.

Propiedades de la Transformada de Fourier

(1) Linealidad. Si f y g tienen transformada de Fourier y α, β son constantes entonces $\alpha f + \beta g$ tiene Transformada de Fourier y además,

$$\mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha \mathcal{F}\{f\} + \beta \mathcal{F}\{g\}.$$

(Lo mismo es válida para $\mathcal{F}^{-1}$, la transformada inversa).

(2) Derivación en el tiempo.

Si f es continua, $\lim_{|t|\to\infty} f(t) = 0$ y f' es absolutamente integrable entonces

$$\mathcal{F}\{f'\}(w) = iw\mathcal{F}\{f\}.$$

Aplicación reiterada de esta propiedad, y bajo el cumplimiento de condiciones adecuadas, se tiene

$$\mathcal{F}\{f''\}(w) = iw\mathcal{F}\{f'\} = (iw)^2 \mathcal{F}\{f\}.$$

$$\mathcal{F}\{f'''\}(w) = iw\mathcal{F}\{f''\} = (iw)^3 \mathcal{F}\{f\}.$$

$$\ldots \quad \mathcal{F}\{f^{(n)}\}(w) = (iw)^n \mathcal{F}\{f\},$$

donde $f^{(n)}$ denota la n-ésima derivada de f.

(3) Derivación en la frecuencia.

Si f y $xf(x)$ son absolutamente integrables (y por brevedad en las condiciones $\hat{f}$ y $\mathcal{F}\{xf(x)\}$ existen) entonces $\hat{f}$ es diferenciable y se cumple

$$\frac{d}{dw}\hat{f}(w) = -i\mathcal{F}\{xf(x)\}.$$

Aplicación reiterada de esta propiedad, y bajo condiciones adecuadas, se tiene que

$$\frac{d^n \hat{f}}{dw} = (-i)^n \mathcal{F}\{x^n f\}.$$

Ejemplo importante. $f(x) = e^{-x^2/2}$ es tal que

$$\hat{f}(w) = e^{-w^2/2}.$$

(La transformada de Fourier de $e^{-x^2/2}$ es "ella misma")

(4) Cambio de Escala: $\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}\{f\}\left(\frac{w}{a}\right).$

Ejemplo.

$$\mathcal{F}\{e^{-x^2}\} = \mathcal{F}\{e^{-(\sqrt{2}x)^2/2}\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{F}\{e^{-x^2/2}\}\left(\frac{w}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-w^2/4}.$$

(5) Traslación en el tiempo: $\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-iwa}\hat{f}.$

(6) Traslación en la frecuencia :

$$\hat{f}(w-w_0) = \mathcal{F}\{e^{iw_0 t} f\}.$$