Complemento #1

Recordemos que el Axioma de Tricotomía en términos de desigualdades se traduce en afirmar que dados dos números reales a y b exactamente una de las siguientes afirmaciones se cumple:

$$a > b, \qquad a = b, \qquad a < b.$$

En virtud de esto, si la primera falla entonces una de las otras dos debe ocurrir, es decir $a \leq b$. Similarmente, si la última no ocurre entonces una de las otras dos debe ocurrir, es decir $a \geq b$. Con esto estamos diciendo que

$$a \not< b \Longleftrightarrow a \geq b \qquad \text{y} \quad a \not> b \Longleftrightarrow a < b.$$

En análisis es común probar una igualdad $a = b$ demostrando dos desigualdades, a saber $a \leq b$ y $a \geq b$. Vamos a probar que en realidad esto es correcto, es decir, si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces

$$a = b \quad \Longleftrightarrow \qquad [\, a \leq b \qquad \wedge \qquad a \geq b\,].$$

En efecto, si $a = b$ entonces por el Axioma de Tricotomía no puede ocurrir $a > b$ y tampoco puede ocurrir $a < b$. Por tanto, por lo expuesto líneas arriba, se concluye que $a \leq b$ y $a \geq b$. La implicación recíproca se demuestra fácilmente por el método de contradicción y el Axioma de Tricotomía.

Un segundo hecho muy usado en análisis consiste en probar netamente desigualdades de la forma $A \leq B$. Para ello es común utilizar una técnica que consiste en usar el siguiente hecho: si A y B son números reales tales que

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\ (A < B + \varepsilon) \quad \Longrightarrow A \leq B.$$

Este hecho se puede probar fácilmente usando el método de reducción al absurdo. En efecto, supongamos que la conclusión es falsa, es decir $A > B$. Como la hipótesis vale para todo número positivo ε, podemos aplicarla con el valor $\varepsilon = A - B$, el cual es positivo. Obtenemos así que $A < B + (A - B) = A$, lo que es una contradicción.

A continuación les recuerdo algunas consecuencias de los axiomas de orden del conjunto de los números reales que se dejaron como ejercicio:

1. Para todo par de números reales a y b se cumple $a^2 \pm ab + b^2 \geq 0$.
2. Si a y b son reales positivos entonces: $a < b \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 < b^2$.
3. Si a y b son reales negativos entonces: $a < b \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 > b^2$.
4. Si $a > b > 0$ entonces $1/a < 1/b$.
5. Si $a > 0$ entonces $1/a > 0$.
6. Si $a < b < 0$ entonces $1/a > 1/b$.

También quedó pendiente demostrar lo siguiente: **La intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$ es también un subconjunto inductivo**.

Sigifredo Herrón