Complemento #2

1. Recordemos que uno de los axiomas de orden garantiza que la suma de reales positivos y el producto de reales positivos es también un real positivo. Por tanto la suma de naturales y el producto de naturales es un real positivo. En realidad es un natural. Demuestre por inducción que esto es así, es decir:

$$\forall\, m, n \in \mathbb{N} \qquad [m + n \in \mathbb{N} \quad \wedge \ m \cdot n \in \mathbb{N}].$$

$$\boxed{\text{Definamos el conjunto } \mathbb{Z}^- := \{a \in \mathbb{R} : -a \in \mathbb{Z}^+\}.}$$

Notemos que este es el conjunto de los *opuestos* de los números naturales. También definimos

$$\boxed{\mathbb{Z} := \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+,}$$

el cual llamamos el *conjunto de los números enteros.* Se usa la letra $\mathbb{Z}$ porque en el idioma alemán la palabra "número" se dice "*Zahl*" y se mantuvo la primera letra de esta palabra para designar al conjunto de todos los números enteros.

☞ Concluimos de la definición previa que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

2. Elabore un argumento para justificar que la suma de enteros y el producto de enteros es también un entero.

Definamos a continuación la potenciación de números reales con exponentes enteros de la siguiente manera: Sean $x \,\&\, y$ números reales y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\boxed{x^1 := x; \quad \text{para} \quad n > 1,\ x^n := x^{n-1}x. \quad \text{Si} \quad x \neq 0,\ x^{-n} := (x^{-1})^n.}$$

3. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$. Demuestre por inducción las siguientes propiedades:

$$x^m x^n = x^{m+n}, \quad (xy)^n = x^n y^n, \quad (a^n)^m = a^{nm}, \quad \text{si} \quad y \neq 0, \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

Sean $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$. El siguiente cómputo motiva o sugiere definir $x^0 := 1$.

$$1^n = 1 = \frac{x^n}{x^n} = x^n \frac{1}{x^n} = x^n \frac{1^n}{x^n} = x^n \left(\frac{1}{x}\right)^n = x^n (x^{-1})^n = (x^1 x^{-1})^n.$$

4. Demuestre por inducción: Sean $x \,\&\, y$ reales positivos. Entonces

$$x < y \Longrightarrow (\forall\, n \in \mathbb{N})\ (x^n < y^n).$$

5. Demuestre por inducción las siguientes desigualdades (**de Bernoulli**): Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq -1$. Entonces para todo natural n se tiene que

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Si $x \leq 1$ entonces $(1 - x)^n \geq 1 - nx$.

6. Demuestre, por inducción, la desigualdad (más general que la Desigualdad de Bernoulli: Para $i = 1, 2, \ldots, n$ considere los reales x_i con $x_i \geq 0$. Entonces

$$(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) \cdots (1 + x_n) \geq 1 + (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n).$$

`Observe que de esta desigualdad se deduce, para números no negativos, la primera de Bernoulli haciendo`

$$x = x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

Sigifredo Herrón