Complemento #3

Nota: De los ejercicios a continuación que se demuestran por inducción, pruebe al menos uno de ellos usando el *Principio del buen orden*.

1. Sean $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dos funciones. Se define la notación $\sum$ así: Para p y q enteros,
$$\sum_{i=p}^{p} f(i) = f(p), \quad \sum_{i=p}^{q+1} f(i) = \Big(\sum_{i=p}^{q} f(i)\Big) + f(q+1) \quad \text{si} \quad q > p.$$
Demuestre que si m y n son reales fijos entonces para todo entero $k \geq p$ se cumple que
$$\sum_{i=p}^{k} [m \cdot f(i) + n \cdot g(i)] = m \sum_{i=p}^{k} f(i) + n \sum_{i=p}^{k} g(i).$$
Observemos que de la definición se deduce que $\displaystyle\sum_{i=p}^{k} f(i) = f(p) + f(p+1) + \cdots + f(k)$.

2. Pruebe que para todo $n \geq 1$ se tiene que $(1 + 2 + \cdots + n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$.

3. Pruebe que para todo $n \geq 1$ se tiene que $(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

4. Pruebe: para todo $n \geq 1 :\ (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = n^2(n+1)^2/4$. (Ver pie de página [1])

5. Demuestre que para todo $n \geq 1$ se tiene que
$$3[1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)] = 3 \sum_{i=1}^{n} i(i+1) = n(n+1)(n+2).$$

6. Combinando los resultados de los Ejercicios 2, 3 y 1 se demuestra el Ejercicio 5 sin utilizar inducción. Justifique esta afirmación.

7. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} [2i + 1] = (n+1)^2$. Proporcione una interpretación de este resultado.

8. Demuestre que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (2i+1)^3 = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$.

9. Deduzca una fórmula para $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 6k(k+1)$.

10. Sean $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ una función y $m < n$ enteros fijos. Demuestre la propiedad llamada suma telescópica:
$$\sum_{i=m}^{n} [f(i+1) - f(i)] = f(n+1) - f(m).$$

11. Demuestre que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$ ¿Se le ocurre algún método corto?

[1] Note que de los ejercicios 2 y 4 se deduce que $\forall\, n \geq 1, 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

12. Sean a, b números reales tales que las expresiones a continuación que las involucran estén definidas. Demuestre que para $n \in \mathbb{N}$,

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}\, b^k,$$

es decir $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n)$.

De esto deduzca que para $b \neq 1$,

$$1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}.$$

13. Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

14. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Demuestre por inducción que

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|, \quad |a_1 - a_2 - \cdots - a_n| \geq |a_1| - |a_2| - |a_3| - \cdots - |a_n|.$$

15. Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple $\frac{1}{x^2+3} + \frac{1}{|x|+6} \leq \frac{1}{2}$.

16. Sean a y b reales. Pruebe:

$$|a+b| = |a| + |b| \quad \Longleftrightarrow \quad ab \geq 0.$$

17. Aceptando que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, demuestre que no exite un racional q tal que $q^2 = 8$.

18. Pruebe que si $a, b, c \in \mathbb{R}$ distintos de cero entonces

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 6.$$

19. Sean a y b reales con $a < b$. Se definen los siguientes conjuntos de números reales llamados *intervalos*.

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \qquad (a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$
$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \qquad [a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Sea $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que a lo sumo uno de los intervalos $(x - \frac{1}{2}, x)$ y $(x, x + \frac{1}{2})$ contiene un entero.

Sigifredo Herrón