Complemento #4

1. **Ejercicio resuelto**.

   Demostremos que el supremo del conjunto
   $$A := \left\{ \frac{3n-1}{2n+5} : n \in \mathbb{N} \right\}$$
   es $3/2$. Un cálculo directo nos permite concluir que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{3n-1}{2n+5} \leq 3/2$. Por tanto $3/2$ es cota superior de A. Veamos ahora que $3/2$ es la menor de las cotas superiores de A, lo que demuestra que en efecto es el supremo. En este momento en que va la teoría desarrollada podemos usar el argumento de la propiedad de aproximación del supremo. Para esto, sea $\varepsilon > 0$ y veamos que exite un elemento $a \in A$ tal que $3/2 - \varepsilon < a$. Equivalentemente, que existe un natural N tal que
   $$\frac{3}{2} - \varepsilon < \frac{3N-1}{2N+5}, \tag{1}$$
   lo cual equivale a probar que existe N natural de manera que
   $$\frac{1}{2N+5} < \frac{2\varepsilon}{17}.$$
   Esta última desigualdad se puede obtener para algún número natural N vía la propiedad Arquimediana. En efecto, por dicha propiedad existe tal N de manera que $\frac{1}{N} < \frac{2\varepsilon}{17}$ y como
   $$\frac{1}{2N+5} < \frac{1}{N}$$
   entonces, por transitividad, tenemos que
   $$\frac{1}{2N+5} < \frac{2\varepsilon}{17}.$$
   De esta desigualdad devolvemos los pasos y llegamos a (1). Así hemos probado que $\sup A = 3/2$.

2. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $A > 0$ fijos y suponga que existe un número natural N de manera que
   $$\forall\, n \geq N, \quad x < y + \frac{A}{n}.$$
   Demuestre que $x \leq y$.

3. Sean A y B subconjuntos no vacíos de números reales y acotados (es decir acotados superiormente e inferiormente). Demuestre que
   $$\inf(A+B) = \inf A + \inf B.$$

4. Sean A un subconjunto no vacío de números reales y acotado superiormente y $c \in \mathbb{R}$ una constante. Se define el conjunto
   $$c + A := \{c + a : a \in A\}.$$
   Demuestre que $\sup(c+A) = c + \sup A$.

5. Sean A un subconjunto no vacío de números reales y acotado inferiormente y $c \in \mathbb{R}$ una constante. Demuestre que $\inf(c + A) = c + \inf A$.

6. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones acotadas, es decir que sus rangos son conjuntos acotados. Demuestre:

   (a) $\inf\{f(x) : x \in A\} + \inf\{g(x) : x \in A\} \leq \inf\{f(x) + g(x) : x \in A\}$.

   (b) $\sup\{f(x) + g(x) : x \in A\} \leq \sup\{f(x) : x \in A\} + \sup\{g(x) : x \in A\}$.

   (c) Ilustre casos en los cuales las desigualdades previas son estrictas.

   (d) ¿Cuál es la diferencia entre el ítem (a) con el ejercicio 3?

7. Sean A y B subconjuntos no vacíos de números reales y acotados. Demuestre que

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

8. Como aplicación del ejercicio previo, encuentre $\sup\left\{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$.

9. Sean $x \in \mathbb{R}$ fijo y $A = \{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$. Pruebe que $\max A = [\![x]\!]$. Concluya que si $m \in \mathbb{Z}$ es tal que $m \leq x$ entonces $m \leq [\![x]\!]$. Acá, $[\![x]\!]$ denota la parte entera de x.

10. Demuestre:

   (a) $m \in \mathbb{Z} \iff [\![x + m]\!] = [\![x]\!] + m$.

   (b) $[\![x]\!] + [\![y]\!] \leq [\![x + y]\!] \leq [\![x]\!] + [\![y]\!] + 1$.

   (c) Para todo natural $n \geq 1$ se cumple que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $[\![\frac{x}{n}]\!] \leq \frac{[\![x]\!]}{n}$. Como consecuencia se infiere que $[\![nx]\!] \geq n[\![x]\!]$ para todo natural $n \geq 1$ y para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (d) Si $x \leq y$ entonces $[\![x]\!] \leq [\![y]\!]$.

   (e) Sean x, y reales positivos. Muestre que $[\![x]\!]\,[\![y]\!] \leq [\![xy]\!]$.

   (f) Sea $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $[\![x]\!] = n$ si y sólo si existe $z \in [0, 1)$ tal que $x = n + z$. El número real z es llamado la *parte fraccionaria* de x, que denotamos por $((x))$.

11. Demostremos que si $n \geq 1$ es un número natural entonces $[\![\frac{x}{n}]\!] = [\![\, [\![x]\!]/n]\!]$. Una estrategia que usaremos es probar mutua desigualdad: Como $[\![x]\!] \leq x$ entonces $[\![x]\!]/n \leq x/n$ y así por el literal (d) del ejercicio 10 concluimos que $[\![\frac{x}{n}]\!] \geq [\![\, [\![x]\!]/n]\!]$. Para probar la desigualdad inversa, sea $\varepsilon > 0$ y fijemos tanto x como n. Como $[\![\frac{x}{n}]\!] = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x/n\}$ entonces existe un entero $k \leq x/n$ tal que $[\![\frac{x}{n}]\!] - \varepsilon < k$. Ahora bien, $k \leq [\![\frac{x}{n}]\!]$ y la parte (c) del ejercicio 10 implican que $k \leq \frac{[\![x]\!]}{n}$ y por consiguiente $k \leq [\![\, [\![x]\!]/n]\!]$. En consecuencia,

$$[\![\tfrac{x}{n}]\!] - \varepsilon < [\![\, [\![x]\!]/n]\!].$$

   Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitrario entonces necesariamente $[\![\frac{x}{n}]\!] \leq [\![\, [\![x]\!]/n]\!]$.

12. Demostremos que $[\![x]\!] + [\![x + 1/2]\!] = [\![2x]\!]$. Sea $x = [\![x]\!] + z$ con $0 \leq z < 1$ (ver literal (f) del ejercicio 10). Consideremos dos casos:

Caso 1: $0 \leq z < 1/2$.

Tenemos entonces que $x + 1/2 = [\![x]\!] + (z + 1/2)$ con $1/2 \leq z + 1/2 < 1$. Luego, por el literal citado, $[\![x + 1/2]\!] = [\![x]\!]$. También se tiene que $2x = 2[\![x]\!] + 2z$ con $0 \leq 2z < 1$ y por tanto $[\![2x]\!] = 2[\![x]\!]$. En consecuencia, $[\![x]\!] + [\![x + 1/2]\!] = [\![2x]\!]$.

Caso 2: $1/2 \leq z < 1$.

Bajo este supuesto se tiene que $x + 1/2 = [\![x]\!] + z + 1/2 = [\![x]\!] + 1 + (z - 1/2)$ con $0 \leq z - 1/2 < 1/2$. Luego, $[\![x + 1/2]\!] = [\![x]\!] + 1$. Por otra parte, $2x = 2[\![x]\!] + 2z = 2[\![x]\!] + 1 + (2z - 1)$ con $0 \leq 2z - 1 < 1$ y de esta manera $[\![2x]\!] = 2[\![x]\!] + 1$. Por tanto, $[\![x]\!] + [\![x + 1/2]\!] = 2[\![x]\!] + 1 = [\![2x]\!]$.

13.

(a) Pruebe que $[\![x]\!] + [\![x + 1/3]\!] + [\![x + 2/3]\!] = [\![3x]\!]$.

(b) Pruebe que $[\![x]\!] - 2[\![x/2]\!] \in \{0, 1\}$.

(c) Muestre que el número de enteros m para los cuales $x < m \leq y$ es $[\![y]\!] - [\![x]\!]$.

(d) Pruebe que el resto al dividir el entero a por el entero $m > 0$ es $m((a/m))$, donde $((x)) = x - [\![x]\!]$ es la parte fraccionaria del real x.

(e) Sean $m \geq 1$ un natural y $x > 0$. Demuestre que el número de múltiplos positivos de m que no exceden a x está dado por $[\![x/m]\!]$.

Una aplicación inmediata de esta afirmación es la siguiente: Sean n y a enteros positivos. Entonces el número de enteros de la sucesión $1, 2, \ldots, n$ que son divisibles por a es $[\![n/a]\!]$. En efecto, esto equivale a encontrar el número de múltiplos de a que no exceden a n y por lo afirmado inicialmente este número es $[\![n/a]\!]$.

Sigifredo Herrón