Complemento # 5

1. **Axioma de continuidad**: Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos tales que $\forall\, a \in A \quad \forall\, b \in B \quad a \leq b$. Entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\forall\, a \in A \quad \forall\, b \in B \quad a \leq c \leq b$.

   Demuestre que el Axioma de continuidad es equivalente al Axioma de completez.

2. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$. Suponga que $x \leq y$ para cada $x \in A$ y cada $y \in B$. Suponga que existen $\sup A$ e $\operatorname{ínf} B$. Pruebe que $\sup A \leq \operatorname{ínf} B$. Además, pruebe que $\sup A = \operatorname{ínf} B$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, existen $x \in A$ e $y \in B$ tales que $y - x < \varepsilon$.

3. Si A y B contienen solamente números positivos y tienen supremo en $\mathbb{R}$, entonces AB tiene supremo en $\mathbb{R}$ y además $\sup(AB) = (\sup A)(\sup B)$.

4. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado. Si $\operatorname{ínf} A = \sup A$, demuestre que A es un conjunto singular, es decir unitario.

5. Sea $A \subset \mathbb{R}$ acotado y tal que $\operatorname{ínf} A > 0$. Si definimos el conjunto de los recíprocos de A como $\frac{1}{A} := \{1/a : a \in A\}$, pruebe que este conjunto es acotado superiormente y además

   $$\sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\operatorname{ínf} A}.$$

   Establezca condiciones para obtener la igualdad correspondiente para $\operatorname{ínf}\left(\frac{1}{A}\right)$ y demuestre su afirmación.

6. Sea $A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente por $s \in \mathbb{R}$ y acotado inferiormente por $y \in \mathbb{R}$. Si tanto s como y pertenecen al conjunto A pruebe que $y = \operatorname{ínf} A$ y que $s = \sup A$.

7. Sea $A = \{a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} : a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Pruebe que $\operatorname{ínf} A = 6$.

8. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ dos reales positivos fijos con $x < y$. Pruebe que para todo natural $n \geq 1$ se cumple que $n(x/y)^{n-1} < \frac{y}{y-x}$.

9. Sea $A = \{x > 0 : x^2 > 2\}$. Pruebe que $y := \operatorname{ínf} A$ existe en $\mathbb{R}$. Demuestre también que $y^2 = 2$ (por tanto y no es un número racional).

10. Demuestre que

    $$\bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, 1/n) = \{0\}.$$

11. Pruebe que

    $$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1/n) = \emptyset.$$