Complemento # 6

1. Demuestre que entre dos reales a y b con $a < b$ existe un racional r.

2. Probemos el teorema siguiente: Entre dos reales a y b con $a < b$ existe un irracional y. En efecto, aplicando el resultado anterior con r y b obtenemos otro racional s tal que $a < r < s < b$. Por otra parte, $0 < \sqrt{2} < 2$ y así $0 < \sqrt{2}/2 < 1$ y además $\sqrt{2}/2$ es irracional. Luego,

$$a < r < r + \frac{\sqrt{2}}{2}(s - r) < s < b,$$

de donde se sigue la prueba teorema eligiendo $y = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(s - r) \in \mathbb{I}$. ☑

3. Escriba en términos de la variable z la ecuación de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.

4. Halle la parte real de $\dfrac{(1+i)^{10}}{(1-i)^6}$.

5. Sean z y w complejos y suponga que $z + w$ y zw son números reales negativos. Pruebe que z y w deben ser números reales.

6. Pruebe: $\overline{z} = z \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

7. Encuentre todos los valores posibles de i^n variando $n \in \mathbb{N}$.

8. Demuestre la Identidad del paralelogramo para números complejos:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

9. Sean z y w complejos no nulos. Probemos que $|w + z| = |w| + |z|$ si y sólo si existe $t > 0$ tal que $w = tz$.

   La condición suficiente es inmediata pues $|w + z| = |tz + z| = (t + 1)|z| = |tz| + |z| = |w| + |z|$. Supongamos ahora que $|w + z| = |w| + |z|$. Elevando al cuadrado y realizando los cálculos, llegamos a la igualdad

$$Re(z\overline{w}) = |zw| \geq 0. \tag{1}$$

   Escribamos $z = x + iy$ y $w = u + iv$. Por la igualdad y la desigualdad en (1) se tiene que

$$Im(z\overline{w}) = yu - vx = 0$$

   y $ux + vy \geq 0$ respectivamente. Vamos a considerar dos casos: $v = 0$ y $v \neq 0$. Del primer caso, la hipótesis y la igualdad previa se sigue que $y = 0$ y por tanto $z = x$ y $w = u$. Como $u \neq 0$ entonces haciendo $t = x/u$ tenemos que $z = x = (x/u)u = tw$. Observemos que en este caso $Re(z\overline{w}) = ux > 0$ y así $t > 0$, quedando probada la condición necesaria en este caso. Si $v \neq 0$ entonces $x = (u/v)y$ y definiendo $t = y/v$ se obtiene que $z = x + iy = (y/v)(u + iv) = tw$. Sólo resta ver que $t > 0$: Dado que $0 \leq Re(z\overline{w}) = ux + vy$ y $v^2 > 0$ entonces $(ux + vy)/v^2 \geq 0$, es decir $(u^2/v^2)t + t \geq 0$, lo cual equivale a decir que $t|w|^2 \geq 0$. Si $t = 0$ entonces $y = x = z = 0$, lo cual contradice la hipótesis. Por tanto $t > 0$. ☑

10. Si $|z| < 1$ y $|a| < 1$, pruebe que $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}\,z}\right| < 1$.

11. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Pruebe que $|x| + |y| \leq \sqrt{2}\,|z|$.

12. Sean z y w números complejos tales que $|z| \leq 1$, $|w| \leq 1$ y $|z-w| \geq 1$. Demuestre que $|z+w| \leq \sqrt{3}$.

13. Usando la Fórmula de De Moivre y la identidad básica de la trigonometría pruebe que

$$\sin 5\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta \quad \text{y} \quad \cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.$$

14. Sea $v_n = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$ con $n \geq 2$ fijo, una raíz n-ésima de 1. Pruebe que todas las raíces de la unidad son

$$1, v_n, v_n^2, \ldots, v_n^{n-1}.$$

Deduzca que la suma de las raíces n-ésimas de 1 suman cero.