EJERCICIOS INTEGRACIÓN Y SERIES

CARRERA DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

1. Construya sucesiones $\{f_n\}_n$ y $\{g_n\}_n$ que converjan uniformemente en algún conjunto E y tales que $\{f_n g_n\}_n$ no converja uniformemente en E.
2. Considere $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$. ¿Para qué valores de x converge absolutamente esta serie? ¿En qué intervalos converge uniformemente? ¿es f continua en cada punto en el cual la serie converge? ¿Es f acotada? Pruebe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$ converge uniformemente en cada intervalo acotado, pero que no converge absolutamente para ningún valor de x.
3. Para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$ defina $f_n(x) := \frac{x}{1+nx^2}$. Demuestre que $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a una función f y que la igualdad $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ es correcta si $x \neq 0$ pero falsa si $x = 0$.
4. Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones continuas de valor real que converge uniformemente a una función f en un espacio métrico E. Pruebe que $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$ para cada sucesión $\{x_n\}_n \subset E$ tal que $x_n \longrightarrow x \in E$. ¿Es el recíproco cierto? ¿Es cierto el recíproco bajo las hipótesis adicionales de compacidad de E y continuidad de f?
5. Suponga que $\{f_n\}_n$ y $\{g_n\}_n$ son sucesiones de funciones definidas en E y que:

   a) $\sum_1^{\infty} f_n$ tiene sumas parciales uniformemente acotadas en E,
   b) $g_n \longrightarrow 0$ uniformemente en E,
   c) $g_1(x) \geq g_2(x) \geq g_3(x) \geq ...$ para todo $x \in E$.

   Pruebe que $\sum_1^{\infty} f_n g_n$ converge uniformemente en E.
6. Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Demuestre que
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)\, dx = f(0).$$
7. Sean $E = [0,\infty)$, $f_n(x) = e^{-nx}$, $g_n(x) = xe^{-nx}$, $x \in E$. Determine si estas sucesiones de funciones convergen puntualmente en E y determine si convergen uniformemente en E.
8. Sea
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n/2}}{n(n!)},\ x \in [0,1].$$
   Pruebe que f es continua en $[0,1]$.
9. Sea
$$f_n(x) = \frac{nxe^{nx}}{1+ne^{nx}},\ x \in [1,2].$$
   a) ¿Converge $\{f_n\}_n$ uniformemente en $[1,2]$?
   b) Encuentre $\lim_{n\to\infty} \int_1^2 f_n(x)\, dx$.
10. ¿Para cuáles valores de x converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$? Para dichos valores, halle la suma.
11. Si $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, ¿Es la sucesión $\{f_n\}_n$ uniformemente convergente en $\mathbb{R}$?
12. Sea
$$f_n(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-1,-1/n], \\ \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n}, & x \in [-1/n, 1/n], \\ x, & x \in [1/n, 1], \end{cases}$$
   Demuestre que la sucesión $\{f_n\}_n$ converge uniformemente en $[-1,1]$.

13. Sea $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, para $n \in \mathbb{N}$, dada por $f_n(x) = x^n(1-x)$. Demuestre que $\{f_n\}_n$ converge uniformemente en $[0,1]$.

14. Sea $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua. Si $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}$, demuestre que $\{f_n\}_n$ converge uniformemente (en $\mathbb{R}$).

15. Sean $a > 0$ fijo y $f_n(x) = \frac{x}{nx+1}$. Pruebe que $\{f_n\}_n$ converge uniformemente en $[0,a]$. Demuestre que si $\alpha > \frac{1}{2}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)}$$

converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

16. Pruebe que $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \, dx = 0$.

17. Sean $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = 2^n x^n (1-x)^n$ y $g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g_n(x) = x^n - x^{1/n}$. ¿Convergen puntualmente dichas sucesiones? ¿Convergen uniformemente dichas sucesiones?

18. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en $[a,b]$. Si $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ son sucesiones numéricas tales que $a_n \longrightarrow a^+$ y $b_n \longrightarrow b^-$, demuestre que

$$\int_{a_n}^{b_n} f_n(x)\, dx \longrightarrow \int_a^b f(x)\, dx.$$

Ahora supongamos que $A < a < b < B$, $f_n : [A,B] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua para todo $n \in \mathbb{N}$, y $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en $[a,b]$ (no en $[A,B]$!). Si $a_n \longrightarrow a^-$ y $b_n \longrightarrow b^+$ y $\{f_n\}_n$ es una sucesión uniformemente acotada en $[A,B]$, demuestre que

$$\int_{a_n}^{b_n} f_n(x)\, dx \longrightarrow \int_a^b f(x)\, dx.$$

19. Sea $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} \min(1, nx), & x \geq 0 \\ \max(-1, nx), & x \leq 0, \end{cases}$$

para $n = 1, 2, 3...$ Determine si la sucesión $\{f_n\}_n$ converge puntualmente o uniformemente en $\mathbb{R}$.

20. Halle la función suma de $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$ y su dominio.