EJERCICIOS

CARRERA DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

1. Sea a_n la sucesión de reales dada por $a_n = \left(\int_a^b (f(x))^n \, dx\right)^{1/n}$. Demuestre que si f es una función continua de valor real definida en $[a, b]$ y $f \geq 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \max\limits_{[a,b]} f$.

2. **(Desigualdad de Young)** Si $u \geq 0$, $v \geq 0$ entonces
$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$
y la igualdad se cumple si y sólo si $u^p = v^q$.

3. **(Desigualdad de Hölder)** Sean $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ sucesiones de números no negativos. Demuestre que
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{1/q}$$
donde $p, q \geq 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

4. Pruebe que si $a_n > 0$ y $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln a_n}{\ln (n+1)} = -p < -1$ entonces Σa_n converge.

5. Si $\sum a_n$ converge absolutamente entonces $\sum a_n^2$ converge.

6. Encuentre la suma de las series:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n\,(n+1)}.$$

7. Si $\sum q_n^2$ y $\sum p_n^2$ convergen pruebe que $\sum p_n q_n$ también converge.

8. Si $\sum |a_n|$ converge pruebe que $\sum \left|\dfrac{a_n}{1+a_n}\right|$ converge.

9. Demuestre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + k^2 + k}{2^{k+1}\,(k+1)\,k} = 1.$

10. Suponga $a_k \geq a_{k+1}$ y que $\sum a_k$ converge. Pruebe que la sucesión $\{k a_k\}_k$ converge a cero.

11. Resolver los ejercicios del Capítulo 8 (8.1 - 8.27, excepto 8.21) del texto de T. Apostol, Mathematical Analysis.

Sigifredo Herrón