

Ejercicios

- 1) Sea $\varepsilon > 0$. Pruebe que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$.
- 2) Sean $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones acotadas superiormente; es decir, existe $M > 0$ tal que $\forall x \in A$ $f(x) \leq M$ y $\forall x \in A$ $g(x) \leq M$. Demuestre que $f + g$ es acotada superiormente y además,

$$\sup \{f(x) + g(x) : x \in A\} \leq \sup \{f(x) : x \in A\} + \sup \{g(x) : x \in A\}.$$

Elabore y pruebe la respectiva versión para $\inf \{f(x) + g(x) : x \in A\}$.

Ahora, si $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0 \forall x \in A$, pruebe $f \cdot g$ es acotada superiormente y además,

$$\sup \{f(x) \cdot g(x) : x \in A\} \leq (\sup \{f(x) : x \in A\}) (\sup \{g(x) : x \in A\}).$$

Suponga ahora que $f(x) \geq \delta > 0 \forall x \in A$. Demuestre que $\frac{1}{f}$ es acotada superiormente y además, $\sup \left\{ \frac{1}{f(x)} : x \in A \right\} = \frac{1}{\inf \{f(x) : x \in A\}}$.

4) Encuentre el supremo y el ínfimo de $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$.

5) Sean A y B acotados inferiormente y no vacíos. Pruebe que $\inf(A \cap B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

6) Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$ no vacíos acotados y tal que $A \subseteq B$. Pruebe que

$$\inf A \geq \inf B \text{ y } \sup A \leq \sup B.$$

7) Demuestre que el ínfimo del intervalo (a, b) es a (aquí a y b son reales con $a < b$).

8) Encuentre el ínfimo y el supremo del conjunto $A = \left\{ \frac{n+2}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Justifique respuestas.