Recordemos que si U es un abierto acotado de clase C^1 y $\vec{F}: \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial de clase $C^1(\overline{U})$, entonces

$$(1) \qquad \int_U \operatorname{div} \vec{F}(x)\,dx = \int_{\partial U} \vec{F}(x)\cdot\vec{n}(x)\,d\sigma,$$

donde $\vec{n}(x) = (n_1(x), n_2(x), \ldots, n_n(x))$ es el normal exterior unitario en $x \in \partial U$.

Usando (1) con $\vec{F}(x) = (0,0,0,\ldots, \underbrace{u(x)v(x)}_{i\text{-ésima entrada}}, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, donde $u, v: \overline{U} \to \mathbb{R}$ y u, v son de clase $C^1(\overline{U})$, se deduce la siguiente igualdad llamada fórmula de integración por partes en $\mathbb{R}^n$:

$$(2) \qquad \int_U u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx = \int_{\partial U} u(x)v(x)n_i(x)\,d\sigma - \int_U v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\,dx;\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Si en (2), tomamos $v(x) \equiv 1$, entonces

$$(3) \qquad \int_U \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\,dx = \int_{\partial U} u(x)n_i(x)\,d\sigma;\quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Ejercicios

En los siguientes enunciados suponga que las condiciones para aplicar el teorema de la divergencia se cumplen.

1. Pruebe que $\displaystyle\int_U \Delta u(x)\,dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial n}(x)\,d\sigma$ para $u \in C^2(U)$.

   Por tanto, si u es armónica en U entonces $\displaystyle\int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial n}(x)\,d\sigma = 0$.

2. Pruebe la llamada PRIMERA IDENTIDAD DE GREEN:

$$\int_U \left(u(x)\Delta v(x) + \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\right)dx = \int_{\partial U} u(x)\frac{\partial v}{\partial n}(x)\,d\sigma.$$

   De esto deduzca:

$$\int_U \|\nabla u(x)\|^2\,dx = \int_{\partial U} u(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)\,d\sigma - \int_U u(x)\Delta u(x)\,dx.$$

   Note que de esto se sigue que si u es armónica en U, entonces

$$\int_{\partial U} u(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)\,d\sigma \geq 0.$$

3. Pruebe la SEGUNDA IDENTIDAD DE GREEN:

$$\int_U \left(u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x) \right) dx = \int_{\partial U} \left(u(x)\frac{\partial v}{\partial n}(x) - v(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x) \right) d\sigma.$$

Por tanto, si u y v son armónicas en U entonces

$$\int_{\partial U} u(x)\frac{\partial v}{\partial n}(x)\, d\sigma = \int_{\partial U} v(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)\, d\sigma.$$

4. Sea $v : B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase $C^1(\overline{B_1(0)})$ y tal que $\|\nabla v\|^2 = 4v$ y $\operatorname{div}(v\nabla v) = 10v$. Calcule el valor de

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma.$$

Proporcione el valor para el caso $n=3$.

5. Sea $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable y tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \|\vec{f}(x)\| \leq \frac{1}{\|x\|^3+1}.$$

Demuestre que
$$\int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div} \vec{f}(x)\, dx = 0.$$

Sugerencia. Aplique el teorema de la divergencia en una bola $B_R(0)$ y luego haga $R \longrightarrow \infty$.

6. Sea $u : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado y de clase C^1. ¿Será cierto que
$$\int_U \nabla u(x)\, dx = \int_{\partial U} u(x)\, \vec{n}(x)\, d\sigma\,?$$

Justifique.