Ejercicios 2

1. Pruebe que no existe una función $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $u_x-u_y=1$ y $u(0,0)=u(1,-1)$.

2. Resuelva el PVI:

(a)
$$\begin{cases} u_x+u_y=u^2; & y>0,\\ u(x,0)=g(x), \end{cases}$$

con g de clase C^1 y positiva.

(b)
$$\begin{cases} u_x+u_y=u, & (x,y)\in\mathbb{R}^2,\\ u(x,0)=\cos x, & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} yu_x-xu_y=2xyu; & x,y\in\mathbb{R},\\ u(x,x)=x^2, & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} u_x+u_y+u=e^{x+2y}; & (x,y)\in\mathbb{R}^2,\\ u(x,0)=x, & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

3. Resuelva la ecuación diferencial parcial en $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x>0,\ y>0\}$:
$$x^2u_x+y^2u_y=(x+y)u.$$

4. Pruebe que el siguiente PVI tiene infinitas soluciones:
$$\begin{cases} u_x+u_y=2xu; & (x,y)\in\mathbb{R}^2,\\ u(x,x)=e^{x^2}, & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

¿Qué ocasiona esto? Observe que si parametrizamos la curva $\phi:=\{(x,x):x\in\mathbb{R}\}$ por $\gamma_1(r)=r$, $\gamma_2(r)=r$, $r\in\mathbb{R}$ entonces
$$\begin{vmatrix} \gamma_1'(r) & \gamma_2'(r)\\ a(\gamma_1(r),\gamma_2(r)) & b(\gamma_1(r),\gamma_2(r)) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$
donde a y b son los coeficientes de u_x y u_y, respectivamente. Por tanto las curvas ϕ que pueden aceptarse para prescribir la función u son aquellas $\gamma(r)=(\gamma_1(r),\gamma_2(r))$, con r en algún intervalo I tal que
$$\begin{vmatrix} \gamma_1'(r) & \gamma_2'(r)\\ a(\gamma_1(r),\gamma_2(r)) & b(\gamma_1(r),\gamma_2(r)) \end{vmatrix}\neq 0,\quad \forall r\in I.$$
Esta condición y una aplicación del teorema de la función inversa garantizan que el PVI
$$\begin{cases} a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u),\\ u|_{\phi}=\Gamma, \end{cases}$$
donde $\phi=\{(\gamma_1(r),\gamma_2(r)):r\in I\}$ y $\Gamma=\{(\gamma_1(r),\gamma_2(r),u(\gamma_1(r),\gamma_2(r))) : r\in I\}$, tiene una única solución local siendo a,b y c funciones de clase C^1 en sus dominios.

5. Sean $f:\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ de clase $C^1(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))\cap C(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ y $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de clase $C^1(\mathbb{R}^n)$ funciones dadas. Pruebe que el PVI
$$\begin{cases} u_t+\vec{c}\cdot\nabla u=f(x,t); & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0,\\ u(x,0)=g(x), & x\in\mathbb{R}^n, \end{cases}$$
tiene una única solución $u\in C^1$.