Lista 9

1. Sean (X,d) un E.M., $E\subset X$ conexo tal que $E\subset A\cup B$, donde A y B son separados. Entonces $E\subset A$ o bien $E\subset B$.

2. Sean (X,d) un E.M. y $E\subset X$ conexo. Si $F\subset X$ es tal que $E\subset F\subset \overline{E}$, pruebe que F es conexo. Deduzca de esto que si E es conexo, entonces $\overline{E}$ es conexo.

3. Sean (X,d) un E.M. y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos conexos de X tal que
$$\forall n\in\mathbb{N}\ A_n\cap A_{n+1}\neq\phi.$$
Pruebe que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es conexo.

4. Sean (X,d) un E.M., $A\subset X$, $x_0\in A'$, $q\in\mathbb{R}^N$ y $f: A\to\mathbb{R}^N$ una función. Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=q$ con $q\neq 0$, pruebe que existe una bola $B(x_0,\delta)\subset X$ tal que $\forall x\in B(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$ $f(x)\neq 0$.

5. Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua y tal que $f(x)=0$ $\forall x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}^c$. Pruebe que $f(x)=0$ $\forall x\in[0,1]$.

6. La función $P_i:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$; $P_i(x)=x_i$ se llama la i-ésima proyección de $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Pruebe que P_i es continua.

7. La composición de funciones continuas definidas en E.M., es continua. Establezca con precisión esta afirmación y pruébela.

8. Sean (X,d) un E.M. y $f:X\longrightarrow\mathbb{R}^n$ una función, donde
$$f(x)=(f_1(x),f_2(x),\dots,f_n(x))$$
con $f_i:X\longrightarrow\mathbb{R}$. Demuestre que f es continua si, y solo si, para todo $i\in\mathbb{J}_n$, f_i es continua.

9. Demuestre el siguiente teorema: Sean X y Y E.M., $K\subset X$ compacto y $f:X\to Y$ continua. Entonces $f(K)$ es compacto.

10. Sea $\varphi:\mathbb{R}^K\to\mathbb{R}$ dada por
$$\varphi(x)=d_2(x,0)\equiv\|x\|.$$
Pruebe que φ es continua; es decir la norma usual en $\mathbb{R}^K$ es continua.