Lista de problemas 4

(E,d) denotará un espacio métrico.

(1) Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$ que converge a $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

(2) Sean $S = \{(x, \frac{1}{x}) : x \geq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ y

$$T = \{(x,0) : x \geq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Pruebe que S y T son cerrados en $\mathbb{R}^2$, disjuntos y $\text{dist}(S,T) = 0$. [La distancia entre dos cerrados, no vacíos y disjuntos puede ser cero].

(3) Sea (x_n) una sucesión en E. Se define

$$S = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{x_m : m \geq n\}}.$$

Pruebe:

$x \in S \iff$ Existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ que converge a x.

(4) Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Sea $\{(x_n, y_n)\} \subseteq X \times Y$ una sucesión. Pruebe que $(x_n, y_n) \longrightarrow (x,y)$ si, y sólo si $x_n \longrightarrow x$ & $y_n \longrightarrow y$.

(5) Sea $A \subseteq E$, $A \neq \phi$. Se define el diámetro de A, así:

$$\operatorname{diam}(A) = \operatorname{Sup}\{d(x,y) : x,y \in A\}.$$

Demuestre:

(a) Toda bola en E de radio $r>0$ tiene diámetro a lo más $2r$. Proporcione un ejemplo donde el diámetro sea menor que $2r$.

(b) $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$

(c) $A \neq \phi$ es acotado si, y solo si, $\operatorname{diam}(A)$ es un número real ≥ 0.

(d) $\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) + d(A,B)$

(6) Sea $(X_n) \subset E$ una sucesión tal que $X_{2n} \longrightarrow x$ y $x_{2n-1} \longrightarrow x$. Pruebe que $X_n \longrightarrow x$.