Lista de problemas 6

1. Decimos que una familia de conjuntos $\{S_i\}_{i\in I}$ tiene la propiedad de intersección finita si para todo subconjunto finito $J \neq \emptyset$ de I,

$$\bigcap_{i\in J} S_i \neq \emptyset.$$

   Si $\{S_i\}_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos cerrados de un espacio métrico compacto (X,d) con la propiedad de la intersección finita, demostrar que

$$\bigcap_{i\in I} S_i \neq \emptyset.$$

2. Sean S un subconjunto cerrado no vacío de $(\mathbb{R}^k, d_2)$ y $x \in \mathbb{R}^k - S$. Pruebe que existe $y_0 \in S$ tal que $d_2(x, y_0) = \mathrm{dist}(x, S)$ (la distancia de x a S se logra en un punto en S). En otros términos,

$$(\forall z \in S)[d_2(y_0, x) \leq d_2(z, x)].$$

   <u>Hint:</u>

   (i) Como S es cerrado y $x \notin S$, probar que

$$\delta := \mathrm{dist}(x, S) = \inf \{d_2(z, x) : z \in S\} > 0.$$

   (ii) Para $n \in \mathbb{N}$, sea $S_n = \{z \in S : d_2(z, x) \leq \delta + 1/n\}$. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $S_n \neq \emptyset, S_n$ es compacto y $S_n \supseteq S_{n+1}$. A continuación aplicar el teorema de intersección de Cantor (Propiedad de los conjuntos encajados).

   ¿Es válida la conclusión si el subconjunto S no es cerrado?

3. Sean (X,d) un espacio métrico y $F \subset X$. Si para todo subconjunto compacto K de X se tiene que $K \cap F$ es cerrado. Pruebe que F es cerrado.

4. Demuestre el siguiente teorema: Si $\{S_i\}_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos cerrados en un espacio métrico compacto E, con la propiedad de la intersección finita, entonces

$$\bigcap_{i\in I} S_i \neq \emptyset.$$

   (Este teorema es más general que el teorema de la intersección de Cantor).

5. Demuestre: E es compacto si y solo si toda la familia de conjuntos cerrados con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.

6. Un espacio métrico E es secuencialmente compacto si toda sucesión tiene una subsucesión convergente. Pruebe que E es secuencialmente compacto si y solo si todo subconjunto infinito tiene un punto de acumulación.