EJERCICIOS DE INTRODUCIÓN AL ANÁLISIS REAL

1. Sea $E := \{(\cos\theta, \sin\theta) : 0 \leq \theta < 2\pi\}$ y definamos $d^*(p,q) = |\theta_1 - \theta_2|$, donde $p = (\cos\theta_1, \sin\theta_1)$ y $q = (\cos\theta_2, \sin\theta_2)$. Pruebe que (E, d^*) es un espacio métrico.

2. Demuestre que para cualquier colección de n elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en un espacio métrico (E, d) se cumple que
$$d(x_1, x_n) \leq \sum_{k=2}^{n} d(x_{k-1}, x_k).$$

3. (Desigualdad del rectángulo). Sean (X, d) un espacio métrico y $u, v, x, y \in X$. Pruebe que
$$|d(x,y) - d(u,v)| \leq d(x,u) + d(y,v).$$

4. Determine si el conjunto de los números racionales es abierto o cerrado en $\mathbb{R}$. Similar para $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{I}$.

5. Pruebe que el conjunto $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.

6. Muestre que si d es la métrica discreta en un conjunto E, entonces todo subconjunto de E es tanto abierto como cerrado en E.

7. Se define en un espacio métrico (X, d), ***la esfera*** *de centro* $x_0 \in X$ *y radio* $r > 0$ como $S(x_0, r) := \{y \in X : d(y, x_0) = r\}$. Probar que $S(x_0, r)$ es un conjunto cerrado en (X, d).

8. Sean (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$ no vacío. Se define el **diámetro** de A como $diam(A) := \sup\{d(a,b) : \ a, b \in A\}$. Demuestre que si A y B son subconjuntos no vacíos de E y $A \subseteq B$ entonces
$$diam(A) \leq diam(B).$$

9. Se define la distancia entre dos subconjuntos A y B de un espacio métrico X como
$$d(A,B) := \inf\{d(a,b) : \ a \in A, \ b \in B\}.$$
En particular, si $A = \{a\}$ se tiene la distancia del punto a al conjunto B dada por $d(a,B) = \inf\{d(a,b) : \ b \in B\}$.
   (a) Pruebe que si $F \subset X$ es un conjunto cerrado y $x \notin F$ está fijo entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $d(x,F) \geq \varepsilon_0$.
   (b) Si $A \subseteq B$ entonces $d(x,B) \leq d(x,A)$.
   (c) Para cada terna A, B, C de subconjuntos no vacíos de X se tiene que
   $$d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B) + diam(C).$$

10. Sean X un espacio métrico y $F \subset X$ no vacío. Pruebe que F es cerrado en X si y solo si
$$d(x,F) = 0 \implies x \in F.$$

11. Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$ fijo. Para cada $\varepsilon > 0$ se define el conjunto $A_\varepsilon := \{x \in E : d(x,A) < \varepsilon\}$.
   (a) Pruebe que $\forall \varepsilon > 0, \ A_\varepsilon$ es un conjunto abierto en E y $A \subseteq A_\varepsilon$.
   (b) Demuestre que $diam(A_\varepsilon) \leq 2\varepsilon + diam(A)$.

Elaborado por Sigifredo Herrón