Lista 10

1. Sean X, Y E.M., X compacto y $f : X \to Y$ continua y biyectiva. Pruebe que la función inversa es continua. ¿Vale el resultado si X <u>no</u> es compacto?

2. [Homeomorfismo]
Sean (X, d_X), (Y, d_Y) E.M. y $f : X \to Y$ una función. Si f es biyectiva y bicontinua (f y f^{-1} son continuas), decimos que f es un homeomorfismo entre X y Y. En este caso se dice que X y Y son homeomorfos. Demuestre lo siguiente: Si $f : X \to Y$ es biyectiva, entonces son equivalentes:
   (a) f es un homeomorfismo.
   (b) $A \subset X$ es abierto si, y solo si, $f(A)$ es abierto.
   (c) $C \subset X$ es cerrado si, y solo si, $f(C)$ es cerrado.

3. Sean X y Y E.M. y $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Si $E \subset X$ es denso en X, pruebe que $f(E)$ es denso en $f(X)$. Además, si $f(x) = g(x)$ $\forall x \in E$, entonces $f(z) = g(z)$ $\forall z \in X$.

4. Sea $A=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x^2+y^2-z^2-w^2\neq 0\}$. ¿Es A conexo?

5. Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continua y aditiva; es decir para todo $x,y\in\mathbb{R}$ se cumple $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Pruebe que f es de la forma

$$f(x)=f(1)x,$$

para todo $x\in\mathbb{R}$.