# Lista 11

(1) Sean $(X,d)$ un E.M., $f$ y $g$ funciones definidas en $X$ con valores en $\mathbb{R}$ uniformemente continuas. Demuestre que $f+g$ es uniformemente continua. Si además, $f$ y $g$ son acotadas, pruebe que $fg$ es uniformemente continua.

(2) Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Pruebe que $f$ es uniformemente continua. Cambiando la segunda hipótesis por $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = b$, Pruebe que $f$ es uniformemente continua.

(3) Sea $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua siendo $A$ acotado. Pruebe que $f$ es acotada. ¿Se tiene la conclusión si $A$ no es acotado?

(4) Pruebe que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, es uniformemente continua.

(5) Sean $(E,d)$ un E.M. y $A \subset X$ no vacío. Pruebe que la función $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = d(x,A)$ $\forall x \in E$, es uniformemente continua.

(6) Sean $A$, $B$ y $C$ subconjuntos de un espacio métrico $X$. Pruebe las siguientes afirmaciones:

a) Si $A$ y $B$ son separados y $C \subseteq A$, entonces $C$ y $B$ son separados.

b) Si $A$ y $C$ son separados y, $B$ y $C$ también son separados, entonces $A \cap B$ y $C$ son separados.

c) Si $A$ y $B$ son separados, entonces $A \cap C$ y $B \cap C$ son separados.

(7) Sean $(X, d_X)$ y $(Y, d_Y)$ espacios métricos y $f, g: X \to Y$ funciones continuas. Si $S \subset X$ es denso en $X$ (es decir, $\overline{S} = X$), pruebe:

(i) $f(S)$ es denso en $f(X)$,

(ii) Si para cada $p \in S$ se cumple que $f(p) = g(p)$, entonces para todo $p \in X$ $f(p) = g(p)$. Esto último se traduce en que una función continua está determinada por sus valores en un subconjunto denso del dominio.

(8) Un resultado de extensión. Sean $(X, d_X)$ y $(Y, d_Y)$ E.M., $S \subset X$ denso en $X$ y $Y$ es completo. Si $f: S \longrightarrow Y$ es uniformemente continua, pruebe que $f$ tiene una única extensión continua a $X$; es decir existe una única $F: X \longrightarrow Y$ continua tal que $F|_S = f$.

(9) Sea $(E,d)$ un E.M. Demuestre:

(i) Si $A$ y $B$ son subconjuntos abiertos y disjuntos de $E$, entonces son separados.

(ii) Tomemos $x \in E$ y $\delta > 0$. Si $A = B(x,\delta)$ y $B = \{y \in E : d(x,y) > \delta\}$. Entonces $A$ y $B$ son separados.

(iii) Pruebe que cualquier espacio métrico conexo que contiene al menos dos puntos es no contable.