Lista 3

Mientras no se especifique otra cosa, E denotará un espacio métrico con métrica d.

1. Sea $S \subset E$. Pruebe que $\overset{\circ}{S} = \bigcup\{\theta \,/\, \theta \text{ es abierto en } E \text{ y } \theta \subseteq S\}$.
   De ello deduzca que $\overset{\circ}{S}$ es el abierto más grande (respecto a la inclusión) contenido en S.

2. Sea $S \subset E$, $S \neq \phi$. Pruebe que $x \in \overset{\circ}{S} \iff d(x, S^c) > 0$.

3. Sea $S \subset E$, $S \neq \phi$. Pruebe que $d(x,S) = d(x,\overline{S})$ para todo $x \in E$.

4. Sean d_1 y d_2 métricas en E. Decimos que d_1 es equivalente a d_2 si existen constantes $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tales que $\forall x,y \in E$ $\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y)$.
   Demuestre que $S \subseteq E$ es abierto con la métrica d_1 si, y solo si, es abierto con la métrica d_2.

5. Sea $S \subseteq E$. Pruebe que $x \in S'$ si, y solo si, toda bola centrada en x contiene infinitos puntos de S.
   ¿Por qué un conjunto finito no tiene puntos de acumulación?

6. Sea $S \subseteq E$. Pruebe el siguiente teorema: S es abierto en E si, y solo si, para todo $A \subseteq E$, $S \cap \overline{A} \subseteq \overline{S \cap A}$.

7. Si $S \subseteq E$, demuestre que $(\overline{S})^c = \operatorname{int}(S^c)$.

8. <u>Definición.</u> Sea $S \subseteq E$. Se dice que p es un punto frontera de S, si toda bola centrada en p contiene puntos de S y del complemento de S. Denotamos por ∂S el conjunto de puntos frontera de S.
   En símbolos: $p \in \partial S \iff (\forall r>0)[B_E(p,r) \cap S \neq \phi \wedge B_E(p,r) \cap S^c \neq \phi]$.
   Pruebe: (a) $\partial S = \overline{S} \cap \overline{S^c}$, (b) $x \in \partial S \iff d(x,S) = 0 \wedge d(x,S^c) = 0$, (c) $\partial S = \partial(S^c)$.

9. Sean $S \subseteq E$ y $a \in S$. Demuestre que $a \in \partial S$ si, y solo si, $a \in (S^c)'$.

10. Sean $S \subseteq E$ y $a \notin S$. Demuestre que $a \in \partial S$ si, y solo si, $a \in S'$.

11. Sea $S \subseteq E$. Pruebe que $\partial S = \overline{S} - \overset{\circ}{S}$.

12. Sea $S \subseteq E$. Demuestre: (a) $\overline{S} = S \cup \partial S$ (b) S es cerrado si, y solo si, $\partial S \subseteq S$.
    (c) S es abierto si, y solo si, $S \cap \partial S = \phi$.

13. Sea $F \subseteq E$. Pruebe F cerrado $\Longrightarrow (\partial F)^\circ = \phi$.

14. Sea $S \subseteq E$. Demuestre que $\partial S = \phi \iff S$ es abierto y cerrado en E.

15. Si $p \in E$ y $r > 0$, ¿se puede garantizar que $\partial B(p,r) = S(p,r)$; es decir, que la frontera de una bola es la esfera?

16. Demuestre que un espacio métrico E dos puntos distintos se pueden separar por bolas abiertas disjuntas. Esta propiedad se llama Propiedad de Hausdorff.

17. Si $S \subseteq E$ no tiene puntos aislados, pruebe que $\overline{S}$ tampoco tiene puntos aislados.