Lista 4

1. Pruebe que si $x_n \to x$ en un espacio métrico (E, d), entonces el conjunto $\{x_n\} \cup \{x\}$ es cerrado en E.

2. Demuestre el siguiente teorema: En un espacio métrico (E, d) una sucesión (x_n) converge a $x \in E$ si, y solo si, toda subsucesión de (x_n) tiene una subsucesión que converge a x.

3. Sea (E, d) un espacio métrico. E es completo si, y solo si, toda colección $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos cerrados no vacíos decrecientes (es decir, $A_{n+1} \subset A_n \forall n$) y tal que diam $(A_n) \longrightarrow 0$ tiene intersección no vacía. (De hecho $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{p\}$ para algún $p \in E$).

   Sugerencia: Para probar la suficiencia tome $B_n = \overline{A_n}$, donde $A_n = \{x_k : k \geq n\}$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy.

4. Sea (X, d) un espacio métrico, $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de X y $p \in X$. Probar que $\lim_{n\to\infty} x_n = p \quad \Longleftrightarrow \quad \forall U$ abierto que contenga a p, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $x_n \in U$.

5. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de reales con límite a. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i = a.$$