

## Lista 5

1. Probar que el espacio métrico  $(\mathbb{R}, d)$  no es compacto.
2. Sea  $X$  un conjunto infinito con la métrica discreta. Pruebe que el espacio métrico  $(X, d)$  no es compacto. Usando este espacio métrico ilustre que un conjunto cerrado y acotado no tiene que ser compacto.
3. Demuestre que la intersección arbitraria de conjuntos compactos en un espacio métrico  $E$  es también compacta. Demuestre además que la unión de un número finito de subconjuntos compactos es compacta.
4. Sean  $(E, d)$  un espacio métrico,  $S \subseteq K \subseteq E$  con  $S$  infinito y  $K$  compacto. Pruebe que  $S$  tiene un punto de acumulación en  $K$ .
5. Sean  $F$  y  $K$  subconjuntos disjuntos de un espacio métrico  $(E, d)$  con  $F$  cerrado y  $K$  compacto. Pruebe que  $d(F, K) > 0$ .