Lista de Problemas No 1

1. Sean $E \neq \phi$ y $d: E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que: (a) $\forall x,y \in E \quad d(x,y)=0$ si, y solo si, $x=y$,
(b) $\forall x,y,z \in E \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(z,y)$.

Pruebe que d es una métrica en E.

2. Sean (E,d) un espacio métrico y $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} \subseteq E$. Demuestre que
$$d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \dots + d(x_{n-1},x_n) = \sum_{k=1}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}).$$

3. Sea (E,d) un espacio métrico. Si se define $\rho: E\times E \longrightarrow [0,\infty)$ por $\rho(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$, pruebe que ρ es también una métrica en E.

4. Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \phi$ y $B = \{ f: X \to \mathbb{R} \mid f \text{ es acotada} \}$. Si $d: B\times B \longrightarrow [0,\infty)$ se define por
$$d(f,g) = \sup\{ |f(x) - g(x)| : x \in X \},$$
demuestre que d es una métrica en B.

5. Sea $f: [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ una función creciente estrictamente $(x<y \Rightarrow f(x)<f(y))$, $f(0)=0$ y subaditiva (esto es $\forall x,y \geq 0 \quad f(x+y) \leq f(x) + f(y)$). Si (X,d) es un espacio métrico, demuestre que $f\circ d$ es una métrica en X.

6. Sean $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que en la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene igualdad si, y solo si, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\forall i \in \{1,2,\dots,n\} \quad a_i = \lambda b_i$.

7. Sean $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ y $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que
$$\left(\sum a_i b_i c_i\right)^4 \leq \left(\sum a_i^4\right)\left(\sum c_i^4\right)\left(\sum b_i^2\right)^2. \quad \left[\text{Acá abreviamos } \sum_{i=1}^{n} \text{ por } \sum\right].$$

8. En $\mathbb{R}^n$ considere las siguientes métricas: para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$
$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2} \text{ y } d_\infty(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|.$$
Demuestre que
$$\forall x,y \in \mathbb{R}^n, \quad d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n\, d_\infty(x,y).$$

9. Sean (E,d) un espacio métrico, $A \neq \phi$ y $A \subset E$. Se define $\delta_A: E \longrightarrow [0,\infty)$ por
$$\delta_A(x) = d(x,A) \text{ [esto es, la distancia de } x \text{ al conjunto } A].$$
(Recuerde que $d(x,A) = \inf\{ d(x,a) : a \in A \}$). Demuestre que $|\delta_A(x) - \delta_A(y)| \leq d(x,y)$.

<u>Consecuencia.</u> Si $A = \{p\}$, entonces $\delta_A(x) = d(x,A) = d(x,p)$. Por tanto, $|\delta_A(x) - \delta_A(y)| = |d(x,p) - d(y,p)|$ y así, $|d(x,p) - d(y,p)| \leq d(x,y)$.

10. Sean (E_1,d_1) y (E_2,d_2) espacios métricos. Si $E = E_1 \times E_2$ y se define $d: E\times E \longrightarrow [0,\infty)$ para $x = (x_1,x_2) \in E$ and $y = (y_1,y_2) \in E$, así: $d(x,y) = \max\{ d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2) \}$. Demuestre que $(E_1 \times E_2, d)$ es un espacio métrico. Si se define $\tilde{d}(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$, ¿es $(E_1\times E_2, \tilde{d})$ un espacio métrico? Pregunta similar para $\hat{d}(x,y) = \left(d_1^2(x_1,y_1) + d_2^2(x_2,y_2)\right)^{1/2}$.