Lista de problemas 2

1. Sea $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>2y\}$. Pruebe que A es abierto en $\mathbb{R}^2$.

2. Demuestre que el conjunto $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=3y\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^2$.

3. Sean (E,d) un E.M. y $F\subseteq E$. Se define la clausura de F, denotada por $\overline{F}$, como la intersección de todos los subconjuntos cerrados en E que contien a F; es decir $\overline{F}:=\bigcap\{X\subseteq E : X \text{ es cerrado y } X\supseteq F\}$.

   Pruebe: (a) $\overline{F}$ es un conjunto cerrado en E. Pruebe también que $F\subseteq\overline{F}$.

   (b) $x\in\overline{F} \iff \forall\, r>0 \quad B_E(x,r)\cap F\neq\emptyset$.

   (c) $\overline{F}$ es el menor cerrado (respecto a la inclusión) que contiene a F.

   (d) $x\in\overline{F}\iff d(x,F)=0$ (Se define $d(x,F):=\inf\{d(x,y) : y\in F\}$ como la distancia de x a F).

   (e) F es cerrado $\iff F=\overline{F}$.

   (f) Sean A y B subconjuntos de E. Pruebe que $A\subseteq B\Rightarrow \overline{A}\subseteq\overline{B}$ y también $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

4. Sean (E,d) un E.M., $F\subseteq E$ no vacío y cerrado, $x\in E\setminus F$ fijo. Demuestre que existe $\varepsilon_0>0$ tal que $d(x,F)\geq\varepsilon_0$.