Una métrica en el espacio producto

Sean $(X,d),(Y,\rho)$ dos espacios métricos. Definamos $D:(X\times Y)\times(X\times Y)\to\mathbb{R}$ por

$$D\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=\left[d^2(x_1,x_2)+\rho^2(y_1,y_2)\right]^{1/2}.$$

Probemos que D es una métrica en el espacio producto $X\times Y$. El axioma que no es inmediato es la desigualdad triangular, el cual vamos a demostrar. Para ello, denotemos $p=(x_1,y_1)\,,q=(x_2,y_2)\,,r=(x_3,y_3)$ elementos de $X\times Y$. Probemos que

$$D^2\left(p,q\right)\le\left[D\left(p,r\right)+D\left(q,r\right)\right]^2,$$

lo cual implica lo que se quiere probar. Como d y ρ son métricas satisfacen la desigualdad triangular y así,

$$\begin{aligned}D^2\left(p,q\right)=d^2\left(x_1,x_2\right)+\rho^2\left(y_1,y_2\right)&\le\left[d\left(x_1,x_3\right)+d\left(x_3,x_2\right)\right]^2+\left[\rho\left(y_1,y_3\right)+\rho\left(y_3,y_2\right)\right]^2\\&=d^2\left(x_1,x_3\right)+2d\left(x_1,x_3\right)d\left(x_3,x_2\right)+d^2\left(x_3,x_2\right)+\rho^2\left(y_1,y_3\right)\\&\quad+2\rho\left(y_1,y_3\right)\rho\left(y_3,y_2\right)+\rho^2\left(y_3,y_2\right).\end{aligned}$$

Los términos en la suma previa que contienen el factor 2 son claves en la prueba pues ellos involucran la desigualdad de Cauchy-Schwarz, es decir si denotamos por

$$a_1=d\left(x_1,x_3\right),\ b_1=d\left(x_3,x_2\right),\ a_2=\rho\left(y_1,y_3\right),\ b_2=\rho\left(y_3,y_2\right)$$

entonces la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que

$$2(a_1b_1+a_2b_2)\le2\sqrt{a_1^2+a_2^2}\,\sqrt{b_1^2+b_2^2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}D^2\left(p,q\right)&=a_1^2+2a_1b_1+b_1^2+a_2^2+2a_2b_2+b_2^2\\&\le a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+2\sqrt{a_1^2+a_2^2}\,\sqrt{b_1^2+b_2^2}\\&=\left[\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}\,\right]^2\\&=\Big[D\left(p,r\right)+D\left(q,r\right)\Big]^2.\end{aligned}$$

Resuelto por Sigifredo Herrón