Universidad Nacional de Colombia
Introducción al análisis funcional
Segundo parcial
Abril 25 de 2016

`Todo debe estar bien justificado`

1. (20 %) Demuestre que el dual de l^1 es isomorfo a l^∞.

2. (20 %) Definamos $T : l^\infty \to l^\infty$, para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^\infty$, por

$$Tx = \left(\frac{n}{2n+1} x_n\right)_n .$$

   Pruebe que $T \in \mathcal{L}(l^\infty)$ y calcule $\|T\|$.

3. (20 %) Sean X un espacio con producto interno y $M \subset X$ no vacío. Pruebe que (a) $M^\perp$ es un subespacio cerrado de X y (b) $(\overline{M})^\perp = M^\perp$.

4. (20 %) Pruebe el siguiente teorema (**vector de norma mínima**): Sean X un espacio con producto interno y C un subconjunto no vacío de X, convexo y completo. Entonces para cada $x \in X$ existe un único $y \in C$ tal que $||x - y|| = d(x, C)$. Debe especificar donde son usadas las hipótesis.

5. (20 %) Demuestre que $Y := \{y = (y_n)_n \in l^2 : y_{2n} = 0\}$ es un subespacio cerrado de l^2 y encuentre $Y^\perp$.

6. (20 %) Mostrar que en un espacio con producto interior, $x \perp y$ si y solo si $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

Seleccione 5 preguntas