Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín
Solución Quiz N°1. Integración y series

Seleccione sólo uno de los siguientes ejercicios y resuélvalo.

1. Demuestre, usando el Criterio de Riemann, que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es creciente entonces es integrable sobre $[a, b]$.

   Prueba. Dado $\varepsilon > 0$ existe un natural N tal que $(b - a)[f(b) - f(a)]/N < \varepsilon$. Tomemos una partición regular $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ de $[a, b]$ de manera que $t_i - t_{i-1} = (b - a)/N$. Como f es creciente entonces $M_i(f) = f(t_i)$ y $m_i(f) = f(t_{i-1})$ para cada $i = 1, 2, \ldots, N$. Luego,

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= \sum_{i=1}^{N} [M_i(f) - m_i(f)]\,(t_i - t_{i-1}) = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} [f(t_i) - f(t_{i-1})] \\ &= \frac{(b-a)[f(b) - f(a)]}{N} < \varepsilon. \end{aligned}$$

   Por el Criterio de Riemann, f es integrable sobre $[a, b]$.

2. Escriba de manera precisa la definición de conjunto de medida cero en $\mathbb{R}^n$. Además, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua pruebe que su gráfico, definido por $G_f := \{(x, y) : y = f(x)\}$, tiene medida cero en $\mathbb{R}^2$.

   Prueba. La primera parte es teoría. Para demostrar la segunda parte usamos la continuidad uniforme de f en $[a, b]$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ (que depende a lo más de ε) tal que para cada $x, y \in [a, b]$,

$$\text{si } \ |x - y| < \delta \ \text{ entonces } \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b - a). \tag{1}$$

   Seleccionemos una partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ de malla menor que δ, es decir para cada $i = 1, 2, \ldots, N$ se tiene $t_i - t_{i-1} < \delta$. Ahora bien, como f es continua existen $x_i, x_i' \in [t_{i-1}, t_i]$ tales que $M_i(f) = f(x_i)$ y $m_i(f) = f(x_i')$. Si definimos

$$Q_i = [t_{i-1}, t_i] \times [f(x_i'), f(x_i)],$$

   entonces

$$G_f \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} Q_i.$$

   Además, usando (1),

$$\sum_{i=1}^{N} v(Q_i) = \sum_{i=1}^{N} (t_i - t_{i-1})[f(x_i) - f(x_i')] < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{N} (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon.$$

   Esto demuestra que G_f tiene medida cero en $\mathbb{R}^2$.

3. Pruebe que $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$.

   Prueba. Notemos que

$$\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} = \{(x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}, 0) : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

   Además, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un entero k tal que $k \leq x < k + 1$ y así

$$\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ([k, k+1)^{n-1} \times \{0\}).$$

   Puesto que $\mathbb{Z}$ es contable, basta probar que $[k, k+1)^{n-1} \times \{0\}$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Notemos que

$$[k, k+1)^{n-1} \times \{0\} \subset [k, k+1]^{n-1} \times [-\varepsilon/2, \varepsilon/2] =: Q$$

   y $v(Q) = \varepsilon$. Luego, $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$.