Introducción al análisis funcional
Tarea 2
Fecha de entrega: Abril 14 de 2016

1. Pruebe que l^∞ no es separable.
2. Definamos $T : l^\infty \to l^\infty$, para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^\infty$, por
$$Tx = \left(\frac{n}{2n+1} x_n \right)_n .$$
Pruebe que $T \in L(l^\infty)$ y calcule $\|T\|$.
3. Ejercicio 8, página 101.
4. El espacio dual $(c_0)'$ de c_0 es isométricamente isomorfo a l^1. En efecto, la aplicación
$$\psi : l^1 \to (c_0)', \quad \psi(x)y = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$
es un isomorfismo isométrico. Pruebe esta afirmación.
5. Mostrar que en un espacio con producto interior, $x \perp y$ si y solo si $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$
6. Mostrar que en un espacio con producto interior, $x \perp y$ si y solo si $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.
7. Sean $(X, || \cdot ||)$ un espacio normado, $a, b \in X$ con $a \neq 0$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = ||at + b||$. Pruebe que:
   (a) $\lim\limits_{|t| \to \infty} f(t) = \infty$.
   (b) $\exists\, t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(t_1) = \inf\limits_{t \in \mathbb{R}} f(t)$.
8. Sean a y b reales con $a < b$ y $\psi \in C([a, b])$ una función fija. Se define
$$f : C([a, b]) \to \mathbb{R} \quad \text{por} \quad f(x) = \int_a^b x(t)\psi(t)\, dt.$$
Demuestre que f es lineal, continua y $||f|| = \int_a^b |\psi(t)|\, dt$.
9. Sea X un espacio con producto interior. Pruebe que
$$\|x\| = \sup\{\langle x, y\rangle / \|y\| : y \neq 0\}.$$