Una métrica en $\mathbb{R}^n$

Sea $p > 1$ un número real. A continuación se demuestra que si definimos $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$d_p(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p},$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, entonces $(\mathbb{R}^n, d_p)$ es un espacio métrico. Notemos que por definición, d_p es simétrica. El axioma correspondiente a la desigualdad triangular es el que resulta ser más exigente. Debemos demostrar que

$$d_p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq d_p(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d_p(\mathbf{y},\mathbf{z}),$$

es decir,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|^p \right)^{1/p}. \tag{1}$$

Para demostrar esta desigualdad debemos usar otras desigualdades famosas, llamadas *desigualdad de Young*[1] y *desigualdad de Hölder*[2], respectivamente:

(a) $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \quad \forall a, b \geq 0 \quad y \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 1.$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

Prueba. (a) Si a ó b es cero, la desigualdad es inmediata. Supongamos que $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Vamos a probar la desigualdad usando razonamientos aprendidos en la asignatura cálculo diferencial, concretamente optimizando una función adecuada. Para introducir esa función vamos a transformar la desigualdad en otra. Esta es una prueba en la que dirigimos al lector, es decir motivamos la parte clave de la demostración. Notemos que la desigualdad la podemos transformar en otra equivalente:

$$\begin{array}{rcll} ab & \leq & \frac{1}{p}a^p + (1-\frac{1}{p})b^q \;=\; & \frac{1}{p}a^p + (1-\frac{1}{p})b^{\frac{p}{p-1}} \\ A^{\frac{1}{p}}B^{1-\frac{1}{p}} & \leq & \frac{1}{p}A + (1-\frac{1}{p})B & \text{con } A = a^p \ y \ B = b^{\frac{p}{p-1}} \\ (\frac{A}{B})^{1/p}B & \leq & \frac{1}{p}A + (1-\frac{1}{p})B & \\ t^{1/p} & \leq & \frac{1}{p}t + (1-\frac{1}{p}), & \text{con } t := \frac{A}{B}. \end{array} \tag{2}$$

[1] William Henry Young (1863 - 1942), matemático inglés.
[2] Otto Hölder (1859-1937), matemático alemán.

Esta última desigualdad es la que vamos a demostrar; para ello consideramos la siguiente función, la cual vamos a extremar:

$$\varphi(t) = t^{1/p} - \frac{1}{p}t + \frac{1}{p} - 1, \quad \text{con} \quad t > 0.$$

Derivando, tenemos:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{p}t^{\frac{1-p}{p}} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p}\left(t^{\frac{1-p}{p}} - 1\right).$$

Es claro que $\varphi'(t) = 0$ sii $t = 1$, es decir $t = 1$ es el único punto crítico.

Como $\varphi''(1) = \frac{1}{p}(\frac{1}{p} - 1) < 0$ entonces $\varphi(t) \leq \varphi(1) = 0 \quad \forall t > 0$ y, por lo tanto $t^{1/p} - \frac{1}{p}t + \frac{1}{p} \leq 1$. Lo que sigue a continuación es devolver los pasos en (2) y de esta manera queda probada la desigualdad (a).

Ahora demostremos (b). La conclusión es inmediata, si ocurre que $\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p = 0$ ó $\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q = 0$. Supongamos entonces que ambas sumas de la derecha son positivas. Definamos $A^p := \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p > 0 \quad y \quad B^q := \sum_{i=1}^{n} |b_i| > 0$. Aplicando la parte (a), es decir la desigualdad de Young, tenemos:

$$\frac{|a_i b_i|}{AB} \leq \frac{|a_i|^p}{pA^p} + \frac{|b_i|^q}{qB^q} \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Sumando las desigualdades en (3) con $i = 1, 2, \ldots, n$ se tiene que

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{AB}\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \quad &\leq \quad \tfrac{1}{pA^p}\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p + \frac{1}{qB^q}\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \\ &= \quad \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq AB = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}$.

Observaciones. (i) Importante recalcar que la desigualdad de Hölder vale también para sumas infinitas. Una ligera modificación en la prueba anterior da el resultado en este caso.

(ii) Cuando $p = 2$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)^{1/2},$$

la cual corresponde a la **desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz**[3].

[3] Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matemático francés; Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804-1889), matemático ruso y Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), matemático alemán.

La desigualdad de Hölder es el insumo que necesitamos para demostrar la desigualdad (1), la cual es llamada *desigualdad de Minkowski.*

Prueba.

$$\begin{aligned}
|x_i - y_i|^p &= |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)|^p \equiv |a_i + b_i|^p \\
&= |a_i + b_i|^{p-1} |a_i + b_i| \\
&\leq |a_i + b_i|^{p-1} (|a_i| + |b_i|) \\
&= |a_i + b_i|^{p-1} |a_i| + |a_i + b_i|^{p-1} |b_i|.
\end{aligned}$$

Luego, usando dos veces la desigualdad de Hölder y teniendo en cuenta que $(p-1)q = p$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p &= \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{p-1} |a_i| + \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{p-1} |b_i| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p} \\
&+ \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{1/q} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \right)^{1/p} \right].
\end{aligned}$$

En consecuencia, si el primer factor de la línea previa es no nulo (en caso contrario no hay nada que probar),

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \right)^{1/p}.$$

Y así,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \right)^{1/p},$$

Por tanto, sustituyendo $a_i = x_i - z_i$ y $b_i = z_i - y_i$ se tiene el resultado deseado, es decir,

$$d_p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq d_p(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d_p(\mathbf{y},\mathbf{z}),$$

lo cual demuestra que d_p es una métrica en $\mathbb{R}^n$. ■

Redactado por Sigifredo Herrón