Lista 1 de ejercicios

1. Demuestre todos los ejercicios que se han dejado en clase.
2. En el campo de los números reales, si $a < b$ y $x = \frac{a+b}{2} = (a+b)2^{-1}$, entonces se cumple $a < x < b$. (Dicho de otro modo, el promedio de dos números reales distintos se encuentra entre ellos.)
3. En el campo de los números reales, prueba que $a^2 \pm ab + b^2 \geq 0$ para todos a, b. {Sugerencia: ¿cómo se completa el trinomio cuadrado perfecto?}.
4. En el campo de los números reales, si $a < b$, entonces $a < \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b < b$; más generalmente,
$$a < ra + (1-r)b < b$$
siempre que $a < b$ y $0 < r < 1$.
5. Si a, b, c, d son números reales tales que $a \leq b^2 c$ para todo $c > 0$, entonces $a \leq 0$. También, pruebe que si $a \leq (b+d)c$ para todo $c > 0$, entonces $a \leq 0$. Finalmente, si $d \neq 0$ y $a \leq \frac{b+c}{d^2+c}$ para todo $c > 0$, entonces $a \leq b/d^2$. ¿Qué se concluir si hacemos $d = 0$ en la última hipótesis?
6. En el campo de los números reales, $ab \leq \left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2$ para todos a, b.
7. En el campo de los números reales, si $a, b, c \geq 0$ y $a \leq b + c$, pruebe que
$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$
8. Si $a > 0$, entonces $a^{-1} > 0$.
9. Si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$.
10. $a = 0$ si y solo si $a \leq 0$ y $a \geq 0$.
11. $ab < 0 \Longleftrightarrow \big[(\ a > 0 \quad \wedge \quad b < 0\ ) \ \vee \ (\ a < 0 \quad \wedge \quad b > 0\ )\big]$.
12. $a < b \Longleftrightarrow a + c < b + c$.
13. La relación $<$ es transitiva: $a < b$ y $b < c$ implican $a < c$.
14. $0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < a$.
15. $a > 1 \Rightarrow a^2 > a$.
16. Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a < b \Longleftrightarrow a^2 < b^2$.
17. $(a > 0 \ \wedge b > 0) \Rightarrow (a+b)^{-1} < a^{-1}$.
18. $a^2 + b^2 = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0$.

En el siguiente resultado legalizamos el proceso estándar de simplificación (o amplificación) de una fracción y la manera de adicionar y multiplicar cocientes.

Proposición. Sean a, b, c, d números reales. Si $a \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces
$$\frac{ab}{ad} = \frac{b}{d}.$$
Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$
Proof. Basta simplemente aplicar las definiciones, axiomas algebraicos de los números reales y algunas consecuencias ya mencionadas:
$$\frac{ab}{ad} = (ab)(ad)^{-1} = (ab)(a^{-1}d^{-1}) = (ba)(a^{-1}d^{-1}) = (baa^{-1})d^{-1} = bd^{-1} = \frac{b}{d}.$$
Usando este hecho,
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = (ad)(bd)^{-1} + (bc)(bd)^{-1} = (ad+bc)(bd)^{-1} = \frac{ad+bc}{bd}.$$
Ejercicio. Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$, demuestre que
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$